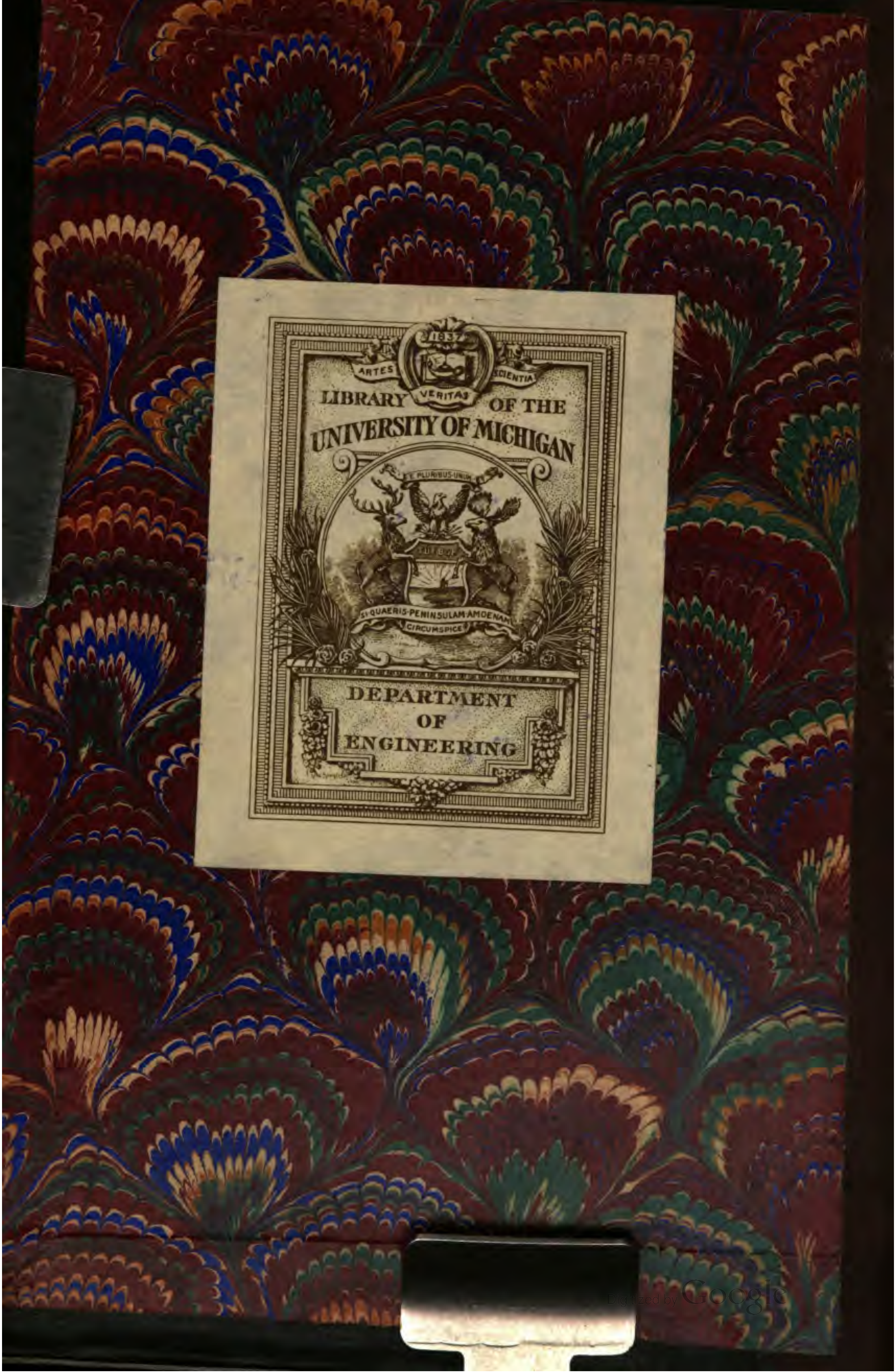


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



ELEMENTE

DER

DARSTELLENDEN GEOMETRIE

VON

DR. RUDOLF STURM,

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU BRESLAU.

ZWEITE UMGEARBEITETE UND ERWEITERTE AUFLAGE.

MIT 61 FIGUREN IM TEXTE UND 7 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1900.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Durch die am 1. April v. J. in Kraft getretene neue Prüfungsordnung für die Candidaten des höheren Lehramts in Preussen wird für die Mathematiker auch die darstellende Geometrie eingeführt, freilich in einer besonderen Lehrbefähigung: Angewandte Mathematik, welche aufser ihr noch die technische Mechanik und die Geodäsie umfasst. Mehrere meiner Fachgenossen an Universitäten, mit denen ich darüber correspondirt habe, theilen mit mir die Ansicht, dass man damit der Bedeutung der darstellenden Geometrie nicht gerecht worden ist: sie ist nicht blos angewandte Mathematik. Von der Begründung dieses Zweiges der Geometrie als besonderer wissenschaftlichen Disciplin durch Monge vor etwa 100 Jahren datirt der gewaltige Aufschwung der modernen Geometrie; diese ist ganz erfüllt und beeinflusst von Vorstellungen, welche aus der darstellenden Geometrie erwachsen sind und gewissermassen das Lebenselement der heutigen Geometrie bilden; es genügt, die Begriffe: projective Eigenschaften, projective Geometrie, geometrische Verwandtschaften zu nennen. Dazu kommt, dass, wer mit darstellender Geometrie sich beschäftigt, eine wesentliche Kräftigung seiner Fähigkeit, im Raume denkend sich zu bewegen, erfährt. So sollte denn für jeden Studirenden der Mathematik, der ein ordentlicher Geometer werden will, für jeden künftigen Lehrer, welcher später guten Unterricht in der Stereometrie geben und in dieser doch wesentlich geometrischen Disciplin nicht ihren rechnerischen Theil zur Hauptsache werden lassen will, die darstellende Geometrie ein unerlässlicher und grundlegender Theil seines geometrischen Studiums sein. Leider haben bis vor nicht langer Zeit die Universitäten gerade diesen Zweig der Geometrie vernachlässigt; wir alle aber, die in den letzten Jahren etwas für seine Einführung gethan, hätten es lieber gesehen, wenn er der bisherigen Lehrbefähigung für (reine) Mathematik eingefügt worden wäre. Das wäre ein wirklicher Fortschritt gewesen; während über die Wirksamkeit der neuen Lehrbefähigung, über welche noch ziemliche Unklarheit herrscht, vielfach Zweifel gehegt werden. (Vergl. den Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. VIII S. 127.) Es wird,

nebenbei bemerkt, für längere Zeit noch Schwierigkeiten machen, Examinatoren zu finden, die alle drei in ihr vereinigten Fächer beherrschen.

Wie dem aber auch sei, den Studirenden der Mathematik ist jetzt empfohlen worden, sich mit der darstellenden Geometrie zu beschäftigen; der Umstand, dass die erste Auflage meiner Elemente der darstellenden Geometrie, welche infolge meiner damaligen Stellung an der technischen Hochschule in Darmstadt in erster Linie bestimmt waren für die Studirenden der Technik, zu Ende geht, hat mich in die Lage gesetzt, zu geeigneter Zeit dieselben in neuer umgearbeiteter Auflage als Lehrbuch erscheinen zu lassen, welches nunmehr vorzugsweise den Universitäts-Studirenden dienen soll; für ihr weiteres geometrisches Studium werden die in der darstellenden Geometrie auftretenden Verwandtschaften (Affinität, Homologie) in ihm eingehend behandelt, wird auf allgemein-projective und speciell-projective Eigenschaften aufmerksam gemacht, wird die perspective Ansicht vom Parallelismus und das Princip der Dualität eingeführt, werden Betrachtungen über die Mannigfaltigkeit der Elemente des Raumes vorgenommen.

Ich hoffe aber, dass das Buch auch noch für künftige Techniker Werth haben wird; das zeichnerische Moment ist nicht vernachlässigt, wie aus den vielfachen Bemerkungen über Controllen und über Überwindung von Schwierigkeiten, die durch den beschränkten Raum des Zeichenblattes entstehen, entnommen werden mag.

Einige Veränderungen und Zusätze dieser neuen Auflage finden sich schon in der italienischen Übersetzung der ersten Auflage. Die Beschränkung auf die geradlinigen und ebenflächigen Gebilde — mit wenigen naheliegenden Überschreitungen — ist dem Buche erhalten worden; eine durch Herrn Collegen Heffter in Bonn vorgeschlagene Erweiterung hat es durch die vier letzten Abschnitte erfahren. Auf die Nothwendigkeit und Erspriesslichkeit des ersten Abschnitts: Darstellung auf einer einzigen Projectionsebene, lege ich Werth.

Stereometrische Figuren, welche in der ersten Auflage fehlten, habe ich diesmal hinzugefügt, und die Verlagshandlung, der ich für ihr Entgegenkommen zu Danke verpflichtet bin, hat sich bereitwillig damit einverstanden erklärt, dass der grössere Theil der Figuren in den Text aufgenommen werde.

Breslau, im März 1900.

R. Sturm.



Inhalt.

Anmerkung. Hier im Inhaltsverzeichnisse sind nachträglich zwei Überschriften erweitert worden.

Elemente der darstellenden Geometrie.

Einleitung.

1. Die graphische Darstellung eines räumlichen Gebildes im Raume selbst bietet im allgemeinen Schwierigkeiten; es fragt sich deshalb, ob es nicht möglich sei, *räumliche Gebilde auf einer Ebene darzustellen,* d. h. die zur Darstellung des Gebildes im Raume vorzunehmenden Constructionen durch solche zu ersetzen, die in der Ebene geschehen. Diese Darstellung in der Ebene muss aber offenbar derartig sein, dass sie auch wirklich das räumliche Gebilde ersetzt, dass dasselbe also aus dieser ebenen Darstellung im Raume wieder hergestellt werden kann, sei es in geistiger Vorstellung oder, wie bei Gegenständen der Technik: Bauwerken, Maschinen, in wirklicher Aufführung. Es ist demnach nothwendig, dass die Lage der einzelnen Theile des Gebildes, ihre Dimensionen, die vorkommenden Winkel aus der ebenen Darstellung und zwar durch Constructionen, die nur in der Ebene des Zeichenblattes erfolgen dürfen, zu ermitteln sind.

Die Methoden zu lehren, durch welche eine solche ebene Darstellung eines räumlichen Gebildes ermöglicht wird, aus derselben das Gebilde selbst reconstruirt werden kann, die Beziehungen aufzufinden, die zwischen dem räumlichen Gebilde und seiner ebenen Darstellung bestehen, ist Sache des Theils der Geometrie, welcher darstellende (beschreibende, descriptive) Geometrie genannt wird. Als Gründer derselben gilt *Monge* (1746—1818), weil er zuerst die (zum Theil schon vor ihm bekannten) Methoden und Sätze mathematisch begründete und zu einem wissenschaftlichen Ganzen zusammenfügte. Die erste Auflage seines berühmten wiederholt aufgelegten Lehrbuches: Géométrie descriptive erschien 1795 unter dem Titel: Leçons de Géométrie descriptive données à l'Ecole normale.

2. Die Methode der Darstellung ist die sogenannte Projectionsmethode. Man sagt, *ein Gebilde* $\mathfrak{G}_1$ *ist die Projection eines andern* $\mathfrak{G}$,

wenn im allgemeinen jedem Punkte von 𝔊 ein Punkt von $𝔊_1$, seine Projection, entspricht. Unter Projection (oder Projiciren) versteht man aber auch die Operation, durch welche man vom Gebilde 𝔊 zum Gebilde $𝔊_1$, von den Elementen (Punkten, Geraden) jenes zu den entsprechenden Elementen dieses gelangt. Die Geraden, welche Punkte mit ihren Projectionen verbinden, heifsen ihre *projicirenden oder Projectionsstrahlen.* Für unsern Zweck ist es nun nothwendig, dass die Projection eben sei; man projicirt also auf eine Ebene, die *Projectionsebene.*

3. Wir besprechen zuerst die allgemeinen Eigenschaften der *Centralprojection (Perspective),* bei welcher *die Projectionsstrahlen sämmtlich durch einen festen Punkt O gehen, das Projectionscentrum.* Sie ist zwar nicht die einfachste Projectionsmethode, umfasst aber die Parallelprojection als Specialfall, und es ist werthvoll, gleich von vornherein sich hinsichtlich der wichtigeren Eigenschaften klar zu machen, welche von ihnen von der Centralprojection in die Parallelprojection übergehen oder nicht und welche nur für diese und insbesondere für die Orthogonalprojection gelten.

Die Projectionsebene sei Π. Ist P ein Punkt des darzustellenden Gebildes, so ist derjenige Punkt P_1, in dem diese Ebene von dem Projectionsstrahle OP getroffen wird, *die Centralprojection von P. Zu jedem Punkte P_1 in Π giebt es daher unendlich viele Punkte, von denen er Projection ist, alle Punkte des Strahls OP_1.*

Es wäre unpraktisch, das Centrum in die Projectionsebene fallen zu lassen, weil dann alle Punkte des Raums die nämliche Projection hätten.

Die Punkte in Π fallen mit ihren Projectionen zusammen.

Es giebt Punkte, welche, wie wir vorläufig noch sagen müssen, *keine Projectionen haben,* alle Punkte der Ebene Π^*, welche durch O parallel zu Π geht und die *Verschwindungsebene* genannt werden soll; denn die Projectionsstrahlen dieser Punkte und nur dieser Punkte sind zu Π parallel.

Die Projection des Centrums O ist völlig unbestimmt: jeder Punkt von Π kann als Projection angesehen werden.

4. Wenn g*) eine Gerade ist, welche dargestellt werden soll, so liegen die Projectionsstrahlen aller ihrer Punkte in der Ebene, welche O mit g verbindet, die Projectionen also auf der Gerade g_1, in der diese Ebene die Projectionsebene schneidet. Diese Ebene Og nennt

*) Es soll möglichst daran festgehalten werden, dass bei der Bezeichnung eines Punktes, einer Gerade, einer Ebene durch einen einzigen Buchstaben dieser bez. aus dem grossen lateinischen, dem kleinen lateinischen, dem griechischen Alphabete genommen wird.

man deshalb *die projicirende Ebene* von g, und g_1 *ist die Projection von* g. Man beachte, dafs, während projicirender Strahl und Projectionsstrahl dasselbe bedeuten, projicirende Ebene und Projectionsebene wesentlich verschiedene Bedeutung haben.

Die Projectionen der Punkte einer Gerade liegen auf der Projection derselben. Oder: *Wenn der Punkt* P *auf der Gerade* g *liegt, so liegt auch die Projection* P_1 *auf der Projection* g_1. Aber umgekehrt ist der Satz nicht richtig: wenn P_1 auf g_1 liegt, so kann man nur schliessen, dass es auf g einen Punkt giebt, der dieselbe Projection hat wie P, oder dass der projicirende Strahl OPP_1 die Gerade g trifft.

Für sämmtliche *Geraden der Verschwindungsebene* Π^* ist diese die projicirende Ebene; *sie haben daher keine Projectionen.*

Alle Geraden einer andern durch O *gehenden Ebene haben deren Schnittlinie mit* Π *zur gemeinsamen Projection.*

Wir wissen schon, alle Punkte einer durch O gehenden Gerade g haben dieselbe Projection, und man wird daher diesen Punkt als Projection von g bezeichnen. Damit sind Ausnahmegeraden erkannt, welche nicht Geraden, sondern Punkte zu Projectionen haben. Es giebt aber eine andere Auffassung, bei welcher diese Geraden auch Geraden zu Projectionen haben. Die projicirende Ebene wird bei einer derartigen Gerade g unbestimmt: jede Ebene durch g kann als projicirende Ebene aufgefasst werden, und dieser Büschel von Ebenen schneidet in die Ebene Π einen Büschel von Strahlen um jenen Punkt. Wir können jeden von diesen Strahlen als Projection von g ansehen. Die Erhaltung eines allgemeinen Satzes in allen Fällen durchzusetzen und Ausnahmen zu entfernen, ist immer vortheilhaft. Wir sehen z. B. gleich, dass bei dieser Auffassung der vorige Satz, dass alle Geraden einer durch O gehenden Ebene die Schnittlinie derselben mit Π zur gemeinsamen Projection haben, keine Ausnahme erleidet; während wir bei der ersten Auffassung die durch O gehenden Geraden der Ebene ausnehmen müssen, weil sie nicht die ganze Schnittlinie, sondern nur einen Punkt derselben zur Projection haben. Immerhin werden wir doch die erste Auffassung bevorzugen.

Der Punkt, in dem eine nicht zu Π parallele Gerade g dieser Ebene begegnet, nennt man ihre *Spur* (Spurpunkt). Dieser Punkt vereinigt sich mit seiner Projection und liegt daher auf g_1; *die Projection einer nicht zu* Π *parallelen Gerade geht immer durch die Spur derselben.* Er wird die Projection, wenn g durch O geht.

Wenn aber g zu Π parallel ist (ohne in Π^* zu liegen), so befindet sie sich mit g_1 zwar in derselben Ebene Og, kann aber von ihr als einer Gerade von Π nicht geschnitten werden. Also sind g

und g_1 parallel. *Eine zu Π parallele Gerade ist zu ihrer Projection parallel.*

Die projicirenden Strahlen der Punkte von g theilen diese beiden parallelen Geraden ersichtlich proportional; *also sind Strecken, welche auf einer zu Π parallelen Gerade liegen, zu ihren Projectionen proportional.*

5. Wenn die Geraden g und l sich in P schneiden, so haben ihre Projectionen g_1 und l_1 die Projection P_1 gemein; im Strahle OPP_1 schneiden sich die beiden projicirenden Ebenen Ogg_1 und Oll_1.

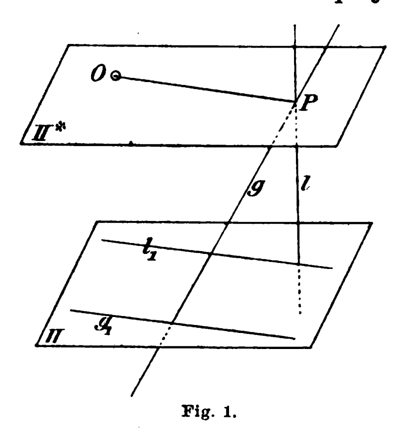


Fig. 1.

Liegt aber P in der Verschwindungsebene Π^*, so wird OP zu Π parallel; er liegt mit den Projectionen g_1, l_1, je in derselben Ebene Og, bez. Ol, schneidet sie aber, da sie in Π liegen, nicht, ist also zu ihnen parallel, und folglich sind sie auch einander parallel (Fig. 1).

Die Projectionen von zwei Geraden g und l, welche sich auf der Verschwindungsebene schneiden, sind parallel, und ihre gemeinsame Richtung ist die des Strahls von O nach dem Schnittpunkte.

Alle Geraden also, welche durch einen Punkt P der Verschwindungsebene gehen, projiciren sich in parallele Geraden von der Richtung OP.

Wir können deshalb sagen: *Ein in der Verschwindungsebene gelegener Punkt projicirt sich in eine Richtung;* damit entfernen wir wiederum eine Ausnahme: *auch die Punkte der Verschwindungsebene, denen wir bisher Projectionen absprachen, erhalten solche, freilich nicht Punkte, sondern Richtungen.*

Wenn zwei parallele Geraden a, b bez. in nicht parallelen Ebenen α, β liegen, so ist deren Schnittlinie $\alpha\beta$ zu ihnen parallel; denn a liegt mit $\alpha\beta$ in der Ebene α, ist andererseits zu β parallel, weil zu der in β liegenden b; daher kann sie die in β liegende $\alpha\beta$ nicht schneiden, ist also zu ihr parallel.

Es seien umgekehrt g und l zwei sich in P schneidende Geraden, deren Projectionen g_1 und l_1 parallel sind; dann ist die Schnittlinie OP der beiden projicirenden Ebenen zu g_1, l_1 und zu Π parallel, liegt in Π^* und mit ihr P.

Die Projectionen zweier sich schneidenden Geraden können nur dann parallel sein, wenn der Schnittpunkt in der Verschwindungsebene liegt.

Nunmehr seien g und l selbst parallel (Fig. 2); die Schnittlinie der beiden projicirenden Ebenen, welche nicht parallel sind, da sie O gemeinsam haben, ist zu ihnen parallel. Sind g und l auch zu Π parallel, so wird es auch diese Schnittlinie; die Projectionen g_1 und l_1 sind dann zu g, l parallel, also zu einander; alle vier Geraden haben dieselbe Richtung. Sind aber g und l nicht zu Π parallel, so gilt dies auch für jene Schnittlinie, und in dem Punkt, in welchem sie Π schneidet, schneiden sich die Schnittlinien der beiden projicirenden Ebenen mit Π, die Projectionen g_1 und l_1 von g und l. Also:

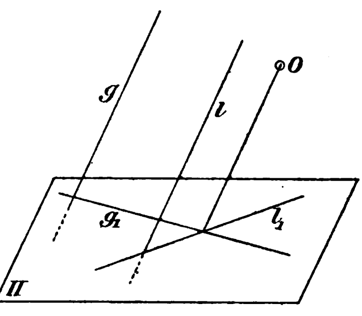


Fig. 2.

Zwei zu einander, aber nicht zu Π *parallele Geraden haben sich schneidende Projectionen, und der Schnittpunkt ist der Punkt, in welchem* Π *von der zu ihnen durch das Centrum gezogenen Parallele getroffen wird.* Oder allgemeiner: *Alle Geraden einer festen Richtung, die nicht zur Projectionsebene parallel ist, projiciren sich in Geraden, die durch einen festen Punkt gehen, den Punkt, in dem die Projectionsebene von der durch das Centrum gehenden Gerade dieser Richtung geschnitten wird.*

Wir können wiederum sagen: *Die gemeinsame Richtung projicirt sich in einen Punkt,* und nur dann in eine Richtung und zwar dieselbe, wenn die parallelen Geraden zu Π parallel sind, wenn also die gemeinsame Richtung in der Projectionsebene und der Verschwindungsebene enthalten ist.

Der gemeinsame Punkt der Projectionen paralleler Geraden wird *Fluchtpunkt* genannt.

Zwei nicht in derselben Ebene gelegene Geraden (*windschiefe* Geraden) haben projicirende Ebenen mit einem gemeinsamen Punkte O, also einer gemeinsamen Gerade, der einzigen, welche durch O geht und mit jeder von ihnen in einer Ebene liegt, also im allgemeinen beide schneidet. Diese Gerade fällt gewöhnlich nicht in die Verschwindungsebene und schneidet die Projectionsebene, und in diesem Schnittpunkte treffen sich die Projectionen der beiden Geraden (Fig. 3). Die

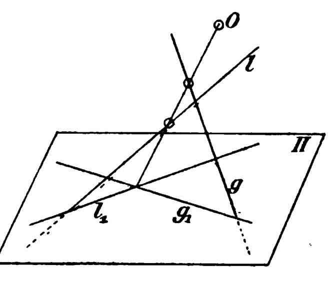


Fig. 3.

Projectionen g_1, l_1 zweier windschiefen Geraden g, l schneiden sich im allgemeinen; man nennt den Schnittpunkt, in welchen sich *verschiedene*

Punkte bez. von g und l projiciren, *scheinbaren Schnitt* von g und l. Nur dann sind g_1, l_1 parallel, wenn die Schnittlinie der beiden projicirenden Ebenen in die Verschwindungsebene fällt.

Wir sehen, dass wir aus der Lage der Projectionen g_1 und l_1 gar keinen Schluss auf die Lage von g und l im Raume machen können.

6. Eine Ebene E, die nicht parallel zu Π ist, hat mit ihr eine Schnittgerade $s = $ EΠ, welche ihre *Spur* oder Spurlinie genannt wird. Jede Gerade in E, welche zu Π parallel ist, ist auch zu dieser Spur parallel, weshalb wir dieses System von Parallelen in E die *Spurparallelen* dieser Ebene nennen. Sie sind, als Parallelen zu Π, zu ihren Projectionen parallel, und daher *sind auch die Projectionen zur Spur parallel.* Alle anderen Geraden von E treffen die Spur und begegnen sich im Treffpunkte je mit ihren Projectionen. Die Spur und ihre Punkte decken sich mit ihren Projectionen.

Die Projectionen der Punkte und Geraden von E bedecken die ganze Projectionsebene Π. Und wir erhalten *eine eindeutige Beziehung zwischen den Elementen von* E *und* Π. Wir wissen schon: jeder Punkt P, jede Gerade g von E hat eine (und nur eine) Projection P_1 und g_1 in Π; aber auch umgekehrt jedes Element P_1, bez. g_1 in Π hat nur ein Element in E, von welchem es Projection ist; denn der durch P_1 gehende Projectionsstrahl $P_1 O$, die durch g_1 gehende projicirende Ebene $g_1 O$ hat nur einen Punkt P, nur eine Gerade g mit E gemein. Durch Parallelismen entstehen, wie wir wissen, Ausnahmen, die jedoch nur vorläufig sind und daher hier nicht nochmals erwähnt werden.

Diese eindeutige Beziehung — *perspective Lage der beiden Ebenen* E *und* Π — ist der Ausgangspunkt des grossen Gebiets der geometrischen Verwandtschaften, deren Theorie im 19. Jahrhundert ausgebildet worden ist.

Wir fanden, dass, wenn P auf g fällt, dann auch P_1 auf g_1 zu liegen kommt, konnten aber im allgemeinen das Umgekehrte nicht behaupten; wissen wir aber, dass *P und g in* E *liegen,* so können wir, da, *wenn P_1 auf g_1 liegt,* der Strahl OP_1 in die Ebene Og_1 fällt, schliessen, dass *der Schnitt P* des ersteren mit E *auf die Schnittlinie g* der zweiten *fallen muss.*

Geht E *durch das Centrum O,* so wird man im allgemeinen sagen, dass alle Punkte von E ihre Projectionen auf der Spur haben, alle Geraden von E sich in diese projiciren (mit Ausnahme der durch O gehenden, welche sich nur in Punkte der Spur projiciren). Kurz, *die Spur ist die Projection von* E. Aber da dem O als Punkt von E und den durch ihn gehenden Geraden auch unbestimmte Projectionen zugeschrieben werden können, so kann man sagen, dass die Projectionen

der Punkte und Geraden auch einer solchen Ebene über die ganze Π sich ausbreiten.

Wenn E *zu* Π *parallel ist, so sind alle ihre Geraden zu* Π *parallel; jede Figur in* E *und ihre Projection sind ähnlich* als Schnitte einer Pyramide (eines Kegels) mit zwei parallelen Ebenen.

7. Denken wir uns das Auge im Projectionscentrum, so wird sich jeder Punkt des Raumes mit seiner Projection scheinbar decken: die Centralprojection eines räumlichen Gebildes wird mithin auf das Auge den nämlichen Eindruck machen wie das Gebilde selbst. Deshalb ist die Centralprojection oder Perspective insbesondere für die Malerei von grossem Werthe, und wir verdanken ihre erste Behandlung auch den grossen Malern der Renaissance. Aber ihre Constructionen sind nicht so einfach, dass die darstellende Geometrie mit ihr begonnen werden kann. Wir wenden uns daher zu einer leichteren Art der Projection, *der Parallelprojection, bei welcher die Projectionsstrahlen parallel sind.*

Die Parallelprojection eines Punktes P auf die Ebene Π *ist also der Schnittpunkt P_1 mit* Π *des durch P in der gegebenen Richtung gezogenen Projectionsstrahles;* wie bei der Centralprojection die Lage des Centrums O in Π, so muss man hier vermeiden, dass die Projectionsstrahlen zur Projectionsebene parallel sind. Thut man dies, so trifft jeder Projectionsstrahl die Π, *jeder Punkt hat eine Projection,* was ein wesentlicher Unterschied von der Centralprojection ist.

Die beiden parallelen Projectionsstrahlen von zwei Punkten einer Gerade g bestimmen eine Ebene; diese nimmt die Gerade in sich auf; der Projectionsstrahl jedes weiteren Punktes von g hat daher denselben mit ihr gemeinsam und ist zu ihr parallel, fällt also in sie. *Diese Ebene, welche die Projectionsstrahlen aller Punkte von g enthält,* nennen wir *die projicirende Ebene von g;* wir bestimmen sie am besten durch g und irgend einen jener Projectionsstrahlen.

Da diese Projectionsstrahlen alle die Π schneiden, so thut es auch die Ebene und *ihr Schnitt mit* Π, auf welchen die Projectionen der Punkte von g fallen, *ist die Projection g_1 von g.* Es gilt also auch hier: *wenn P auf g liegt, so liegt P_1 auf g_1*; und ebenfalls besteht die Umkehrung nicht, da jeder Punkt P_1 in Π Projection von unendlich vielen, von allen Punkten ist, die auf dem durch ihn gehenden Projectionsstrahle liegen.

Die parallelen Projectionsstrahlen theilen g und g_1 proportional; was bei der Centralprojection nur für Geraden gilt, die zu Π parallel sind, gilt hier für jede Gerade: *Die Projectionen zweier auf derselben Gerade gelegenen Strecken verhalten sich wie diese.* Die Mitte einer Strecke projicirt sich in die Mitte.

Da jeder Punkt eine Projection hat, so *projiciren sich bei der Parallelprojection zwei sich schneidende Geraden immer in zwei sich schneidende.*

Es seien g und l parallel; die projicirenden Ebenen sind dann auch parallel; denn in ihnen sind g und l parallel und die Projectionsstrahlen je eines Punktes von ihnen. Folglich sind auch die Schnitte mit Π parallel. *Bei der Parallelprojection projiciren sich parallele Geraden immer in ebenfalls parallele Geraden.* Ein Parallelogramm geht daher in ein Parallelogramm über; daraus folgt, dass zwei gleiche und parallele Strecken sich in gleiche und parallele Strecken projiciren. Liegen zwei ungleiche parallele Strecken vor, so legt man auf die Gerade der einen eine mit der anderen gleiche Strecke und schliesst mit Hilfe des obigen Satzes: *Die Projectionen ungleicher paralleler Strecken verhalten sich wie diese.*

Windschiefe Geraden projiciren sich im allgemeinen in sich schneidende; aber die projicirenden Ebenen können parallel werden, und dann haben sie parallele Projectionen. Man sieht, dass auch hier kein sicherer Schluss aus der Lage der Projectionen auf die Lage der Geraden im Raume zu machen ist.

8. In Bezug auf die Spuren und die in Π gelegenen Elemente gilt ersichtlich das Nämliche wie im vorigen Falle.

Eine zu Π parallele Gerade ist aus demselben Grunde wie früher *zu ihrer Projection parallel;* aber die parallelen Projectionsstrahlen bewirken *Gleichheit einer auf ihr gelegenen Strecke mit der Projection. Eine Figur in einer zu Π parallelen Ebene ist mit ihrer Projection congruent;* die Pyramide (Kegel) des vorigen Falles ist ein Prisma (Cylinder) geworden, das von parallelen Ebenen in congruenten Figuren geschnitten wird.

Für eine Gerade, welche die Richtung der Projectionsstrahlen hat, ist ihre Spur die Projection; jede Ebene durch sie ist den Projectionsstrahlen parallel und kann als projicirende Ebene angesehen werden und daher, wenn man will, jeder Strahl in Π durch die Spur als Projection der Gerade.

Die Projectionen der Elemente *einer Ebene* E, die nicht zu den Projectionsstrahlen parallel ist, breiten sich über die ganze Projectionsebene aus; es entsteht auch hier *eine eindeutige Beziehung* und zwar hier eine völlig ausnahmslose: jedem Elemente der einen Ebene entspricht eines in der anderen; auch die Elemente von E sind Projectionen derer in Π. *Wenn P und g in E liegen, so folgt sowohl, dass P_1 auf g_1 liegt, wenn P auf g liegt, als auch umgekehrt. Wenn g und l in E liegen, so folgt aus ihrer Convergenz oder ihrem Parallelismus die*

Convergenz, bezw. der Parallelismus von g_1, l_1; aber auch umgekehrt, wie sich g_1 und l_1 verhalten, so verhalten sich auch g und l.

Eine Ebene, welche den Projectionsstrahlen parallel ist, projicirt sich in ihre Spur, ihre Punkte und ihre Geraden von der Richtung der Projectionsstrahlen projiciren sich in Punkte der Spur, ihre übrigen Geraden in die Spur.

Man sieht, die Projections*richtung* ist an Stelle des Projectionscentrums getreten.

9. Unter den Parallelprojectionen ist nun die am meisten angewandte und einfachste die *rechtwinklige* oder *orthogonale* (auch orthographische oder Normalprojection), *bei welcher die Projectionsstrahlen auf der Projectionsebene senkrecht stehen.* Eine Parallelprojection, bei der das nicht der Fall ist, heisst *schräge Parallelprojection*, auch klinogonale oder klinographische Projection. Wir betrachten im Folgenden die Orthogonalprojection; unter Projection schlechthin wird gewöhnlich Orthogonalprojection verstanden.

Erster Abschnitt.

Darstellung auf einer einzigen Projectionsebene.

a) Darstellung des Punktes und der Gerade.

10. *Die orthogonale Projection A_1 eines Punktes A auf eine Ebene Π ist der Fusspunkt des aus A auf Π gefällten Lothes.* Die Länge AA_1 giebt uns die Entfernung des Punktes von Π an oder, indem wir der Bequemlichkeit der Anschauung und der Sprache halber Π horizontal voraussetzen, die Höhe von A über Π (die Tiefe unter Π); wir wollen diesen Abstand positiv oder negativ annehmen, je nachdem A über oder unter Π liegt.

Durch A ist ersichtlich A_1 bestimmt, nicht aber umgekehrt A durch A_1; A_1 ist Projection von allen Punkten des Loths, das in A_1 auf Π errichtet ist.

11. *Die projicirende Ebene einer Gerade g enthält die Projectionsstrahlen* (Projectionslothe) *aller Punkte von g und ist deshalb ebenfalls senkrecht zu Π.*

Steht eine Gerade auf der Projectionsebene senkrecht, so projicirt sie sich als Punkt. Sie bildet dann bekanntlich mit allen durch ihren Fusspunkt in Π gezogenen Geraden rechte Winkel.

Wir wissen (Nr. 7), dass die Parallelprojectionen verschiedener Strecken auf einer Gerade oder parallelen Geraden sich verhalten, wie

die Strecken; also ist das Verhältniss der Projection zur Strecke für jede Richtung ein festes. Es hat bei der Orthogonalprojection eine sehr einfache geometrische Bedeutung.

Der spitze Winkel, welchen g mit der Orthogonalprojection g_1 einschliesst, ist, wie die Stereometrie lehrt, der kleinste von den Winkeln, welche g mit den durch ihre Spur in Π gezogenen Geraden bildet, und heisst deshalb *der Neigungswinkel von g gegen* Π; sei derselbe γ, so ist ersichtlich:

$$\cos\gamma = \frac{A_1B_1}{AB}, \quad A_1B_1 = AB\cos\gamma\,.$$

Daraus ergiebt sich, dass *die Orthogonalprojection einer Strecke im allgemeinen kleiner ist als die Strecke selbst.* Gleichheit findet statt, wenn AB zu Π parallel ist; es muss dann $\cos\gamma = 1$, also $\gamma = 0^0$ sein, was zu der Ausdrucksweise berechtigt, dass man den Neigungswinkel einer Gerade gegen eine andere Gerade oder gegen eine Ebene, zu der sie parallel ist, gleich Null annimmt. (Nr. 39).

Ist $\gamma = 90^0$, so ergiebt sich $A_1B_1 = 0$, also ein Punkt.

Sich schneidende Geraden projiciren sich wiederum in sich schneidende Geraden, parallele in parallele, windschiefe im allgemeinen in sich schneidende, ausnahmsweise in parallele.

12. *Ist g gegeben, so ist auch g_1 gegeben, aber nicht umgekehrt mit g_1 auch g; vielmehr ist g_1 die Projection von unendlich vielen Geraden, von allen Geraden, die in der längs g_1 auf* Π *senkrecht errichteten Ebene liegen* (mit Ausnahme der zu Π senkrechten in dieser Ebene; denn diese haben nur einen Punkt von g_1 zu ihrer Projection).

Die Mannigfaltigkeit der Geraden, welche die nämliche Projection g_1 haben, ist ersichtlich viel grösser als die der Punkte auf einem Projectionslothe, welche dessen Fusspunkt zur Projection haben. Alle diese Punkte können wir durch ihren Abstand von einem festen Punkte des Loths, z. B. dem Fusspunkt, bestimmen, also durch *eine* Grösse, und indem wir dieser alle unendlich vielen (positiven und negativen) Werthe geben, erhalten wir alle Punkte und sagen deshalb, es giebt auf einer Gerade *einfach* unendlich viele Punkte.

Die sämmtlichen Geraden aber einer Ebene müssen wir durch zwei Grössen bestimmen, etwa in folgender Weise. Die Strahlen eines Büschels sind auch einfach unendlich; für jeden Strahl bestimmend mag der Winkel mit einem festen Strahle des Büschels sein. Durch jeden Punkt dieses festen Strahls kann man zu jedem Strahle des Büschels die Parallelen ziehen, und erhält je einfach unendlich viele Parallelen zu jedem Strahle; zweite bestimmende Grösse sei dann die

Entfernung des gewählten Punktes auf dem festen Strahle vom Scheitel. Wir haben so alle Geraden der Ebene erhalten und wegen der zwei bestimmenden Grössen, von denen jede unendlich viele Werthe annehmen kann, sagt man: die Ebene enthält *zweifach* unendlich viele Geraden. Aber man wird leicht erkennen, dass der Process ein der Potenzirung analoger ist: wir haben einfach unendlich mal einfach unendlich viele Geraden, und man sagt deshalb correcter: es giebt in der Ebene ∞^2 Geraden; und die einfache Unendlichkeit bezeichnet man durch ∞^1.

Wir erhalten daher genauer: *Jeder Punkt in* Π *ist Projection von* ∞^1 *Punkten, jede Gerade in* Π *hingegen Projection von* ∞^2 *Geraden.*

Zwar müssen im letzteren Falle die Geraden in der Ebene, welche die Richtung der Projectionsstrahlen haben, also jetzt senkrecht zu Π sind, ausgenommen werden; diese bilden eine einfache Unendlichkeit; von der einen bestimmenden Grösse, dem Winkel, ist *ein* Werth auszulassen; es bleiben also für sie immer noch ∞^1 Werthe, und „der Grad der Unendlichkeit" wird nicht vermindert.

b) Darstellung der Ebene.

13. Wenn eine Ebene E senkrecht auf Π steht, so fallen die Projectionsstrahlen aller ihrer Punkte in sie hinein, die Projectionen derselben liegen auf der Spur s, ebenso aber fallen auch die Projectionen aller in E gelegenen (geraden und krummen) Linien mit s oder mit einem Theile von s zusammen. Die Spur ist die Projection der Ebene.

In einer nicht zu Π parallelen Ebene E haben wir schon die zur Spur parallelen Geraden, welche in sie durch die zu Π parallelen Ebenen eingeschnitten werden und mit h bezeichnet werden mögen, hervorgehoben; ihre Projectionen h_1 fanden sich auch zur Spur parallel. Wir heben zweitens *die zu s und den h normalen Geraden* von E hervor, welche f heissen mögen.

Durch jeden Punkt in E geht eine Gerade h und eine Gerade f.

Jede Ebene E, welche Π schneidet, hat ∞^1 Spurparallelen und Spurnormalen.

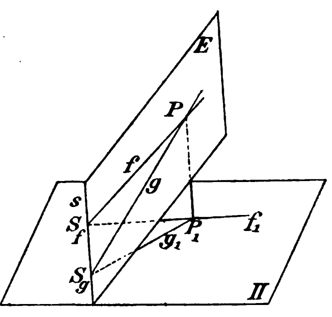


Fig. 4.

Sei f (Fig. 4) eine Spurnormale in E, S_f ihr Spurpunkt, der also auf s liegt, P irgend ein anderer Punkt auf ihr; so ist P_1S_f die Projection f_1. Da nun f aus dem Punkte P in E auf deren Schnittlinie s mit Π senkrecht gefällt ist, PP_1 aber senkrecht auf Π selbst, so ist nach einem

bekannten Satze der Stereometrie f_1 senkrecht zu s und also auch zu den h_1.

Wie die Spurparallelen und Spurnormalen in E selbst zu einander normal sind, so sind es auch ihre Projectionen. Oder:

Die von den Spurparallelen und Spurnormalen einer Ebene gebildeten rechten Winkel gehen durch Orthogonalprojection nicht verloren.

Denken wir uns einen rechten Winkel in einer gegen Π geneigten Ebene, so aber, dass sein einer Schenkel zu Π parallel ist, so ist dieser Schenkel eine Spurparallele, der andere eine Spurnormale in der Ebene; die Projection des rechten Winkels ist mithin wieder ein rechter.

Also erhalten wir folgenden wichtigen Satz:

Die Orthogonalprojection eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel der Projectionsebene parallel ist, ist wieder ein rechter Winkel.

Ein gleichschenkliges Dreieck, von dem die Basis oder die Basishöhe der Projectionsebene parallel ist, projicirt sich demnach wieder gleichschenklig; denn die Halbirung der Basis durch die Höhe bleibt auch erhalten.

Im allgemeinen verändert ein Winkel, von dem nicht beide Schenkel der Projectionsebene parallel sind, seine Grösse.

14. Es sei nun ein spitzer Winkel betrachtet, dessen einer Schenkel zu Π parallel ist. Das rechtwinklige Dreieck, das von seinen Schenkeln mit einer Spurnormale f seiner Ebene gebildet wird, projicirt sich wieder als rechtwinkliges Dreieck, also der spitze Winkel wieder als spitzer. Die diesen beiden spitzen Winkeln anliegenden Katheten sind gleich, die Gegenkathete des gegebenen spitzen Winkels grösser als die, welche der Projection gegenüberliegt (Nr. 11); also ist auch der gegebene spitze Winkel grösser als seine Projection. Weil der Nebenwinkel eines stumpfen ein spitzer ist, so erhalten wir folgende zwei Sätze:

Die Orthogonalprojection eines spitzen Winkels, dessen einer Schenkel der Projectionsebene parallel ist, ist ein kleinerer (spitzer) Winkel, die eines stumpfen Winkels, für den dasselbe gilt, ein grösserer (stumpfer) Winkel.

Die Differenz zwischen einem Winkel, dessen einer Schenkel der Projectionsebene parallel ist, und seiner Orthogonalprojection convergirt gegen Null, sowohl wenn der Winkel sich 0^0 (oder 180^0), als wenn er sich 90^0 nähert.

Liegt die durch den Scheitel eines Winkels gehende Spurparallele seiner Ebene innerhalb des Winkels und theilt ihn in zwei spitze Winkel, so werden die Theile und demnach auch der ganze Winkel

durch Projection verkleinert; also ein spitzer oder rechter Winkel, innerhalb dessen die durch den Scheitel gehende Spurparallele liegt, oder, was dasselbe ist, von dem nur ein Schenkel die Π trifft, verkleinert sich.

Liegt hingegen die durch den Scheitel gehende Spurparallele ausserhalb des Winkels, macht aber mit beiden Schenkeln spitze Winkel, so vergrössert sich der Winkel durch Projection; also ein stumpfer oder rechter Winkel, von dem beide Schenkel die Π treffen oder beide nicht, wird durch Projection grösser.

Es ist leicht einzusehen, dass man auch umgekehrt in diesen Fällen aus der Projection auf den Winkel selbst schliessen kann; denn ebenso wie sich die durch den Scheitel gehende Spurparallele zum Winkel selbst verhält, so verhält sich ihre Projection zur Projection des Winkels.

Es projicirt sich also auch ein rechter Winkel nur dann in einen rechten, wenn sein einer Schenkel zur Projectionsebene parallel ist. Die Orthogonalprojection eines Winkels ist der Neigungswinkel der projicirenden Ebenen der beiden Schenkel, und der zu Π parallele Schenkel steht auf der Schnittlinie dieser Ebenen, einer Normale auf Π, senkrecht. *Daher kann ein rechter Winkel nur so mit seinen Schenkeln in zwei zu einander senkrechte Ebenen gelegt werden, dass der eine Schenkel auf der Schnittlinie derselben senkrecht steht.*

15. Da eine Spurnormale f und ihre Projection f_1 beide in demselben Punkte S_f auf s normal sind (Nr. 13) und bez. in E, Π liegen, so bilden sie die beiden Schenkel eines Neigungswinkels von E gegen Π; der Winkel zwischen f und f_1 ist aber auch der Neigungswinkel von f gegen Π (Nr. 11); also *haben die Spurnormalen einer Ebene gegen* Π *die nämliche Neigung* α *wie die Ebene selber.*

Sei g (Fig. 4) irgend eine andere Gerade in E, P der Punkt, in dem sie eine Spurnormale f trifft, S_f und S_g die beiden Spuren von f und g, P_1 die Projection von P, so sind P_1S_f und P_1S_g die Projectionen f_1 und g_1; P_1S_f ist normal zu s, also kleiner als P_1S_g, mithin $\sphericalangle PS_gP_1$ kleiner als $\sphericalangle PS_fP_1$, weil die Gegenkathete dieselbe PP_1 ist; diese Winkel sind aber die Neigungen α_g und $\alpha_f = \alpha$ gegen Π.

Die Spurnormalen einer Ebene E *haben also unter allen ihren Geraden die grösste Neigung gegen* Π. Unter Neigungswinkeln sind hier und im Folgenden immer Winkel im ersten Quadranten gemeint.

Man kann demnach in einer Ebene E *keine Gerade von grösserer Neigung gegen* Π *ziehen als* $\alpha = (\text{E}, \Pi)$. Sämmtliche in E möglichen Richtungen und Neigungen gegen Π sind schon durch die Strahlen

eines Büschels in Π um den Punkt P vertreten. Je weiter sich die Spur S_g eines Strahls g des Büschels vom Spurpunkte S_f der Spurnormale f im Büschel entfernt, desto grösser wird $P_1 S_g$ und desto kleiner der Winkel $P S_g P_1$, der Neigungswinkel (g, Π), wie die rechtwinkligen Dreiecke $P_1 S_f S_g$ und $P P_1 S_g$ lehren. Es erhellt, dass *jede mittlere Neigung zwischen dem Maximum* α *und dem Minimum* 0^0 *durch zwei Strahlen des Büschels vertreten ist*, *welche* die Spur s in gleicher Entfernung von S_f schneiden und *die Spurnormale und Spurparallele des Büschels zu Halbirungslinien ihrer Winkel haben.*

In Ebenen, welche zu Π parallel sind, schrumpft das Intervall auf die untere Grenze 0^0 zusammen, in solchen, die zu Π normal sind, erweitert es sich auf den vollen Quadranten; nur in solchen sind zu Π senkrechte Geraden möglich.

16. *Wenn umgekehrt* (Fig. 5) *eine Gerade g gegeben ist mit der Neigung* β *gegen* Π, *dann sind durch sie nur Ebenen* E *möglich mit Neigungen gegen* Π, *welche* $\geqq \beta$ *sind. Die obere Grenze* 90^0 *kommt in dem Ebenenbüschel nur der projicirenden Ebene* Υ *von g zu;* in einer Ebene, welche die kleinste Neigung β hat, muss g Spurnormale sein; die Spurlinie s_k muss also in die auf g in der Spur S_g senkrechte Ebene,

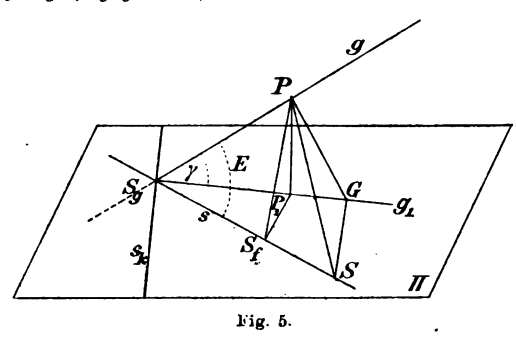


Fig. 5.

welche alle in diesem Punkte auf g senkrecht stehenden Geraden in sich aufnimmt, fallen und ist deren Schnitt mit Π und folglich ist sie und die Ebene E_k des Büschels mit der Minimalneigung eindeutig bestimmt.

Die Projection g_1 der Spurnormale g in dieser Ebene, zugleich die Spur von Υ, steht auch senkrecht auf s_k. Ferner steht s_k auf Υ senkrecht, weil auf g und g_1; mithin ist auch die durch sie gehende Ebene E_k senkrecht zu Υ. *Somit sind die beiden Ebenen des Büschels um g, welche die grösste und die kleinste Neigung* 90^0 *und* β *gegen* Π *haben, senkrecht zu einander, und auch ihre Spuren bilden einen rechten Winkel.*

Die Spuren s der sämmtlichen Ebenen des Büschels bilden in Π um S_g einen Büschel; aus einem Punkte P von g ziehen wir auf jede die Spurnormale PS_f, dann ist $PS_f P_1$ der Neigungswinkel der zugehörigen Büschelebene E. Ferner legen wir durch P die zu g senkrechte Ebene, welche Υ und E in den Schenkeln eines ihrer Neigungs-

winkel schneidet; sie treffe g_1 und s, die Spuren der beiden Ebenen, in G und S, so ist GPS dieser Neigungswinkel. Die Neigungsebene steht auf beiden Ebenen senkrecht, Π ist auch auf γ normal; folglich ist auch die Schnittlinie GS zu γ und den in dieser Ebene gelegenen Geraden g_1 und PG normal. Wir haben die rechtwinkligen Dreiecke $P_1S_fS_g$, PP_1S_f, S_gGS und PGS. Sie zeigen, dass, wenn der Winkel $P_1S_gS_f$ oder (g_1, s) bleibt, auch P_1S_f, GS, $\sphericalangle PS_fP_1$ und $\sphericalangle GPS$ bleiben, wenn aber jener Winkel wächst, P_1S_f, GS und $\sphericalangle GPS$ wachsen, $\sphericalangle PS_fP_1$ aber abnimmt. *Somit ist jeder Neigungswinkel zwischen* β *und* 90^0 *durch zwei Ebenen des Büschels vertreten, deren Flächenwinkel durch die beiden den Grenzneigungen zugehörigen Ebenen* E_k *und* γ *halbirt werden und deren Spuren Winkel bilden, welche die Spuren* s_k *und* g_1 *dieser Ebenen zu Halbirungslinien haben.*

Ist g zu Π normal, so schrumpft das Intervall auf den einzigen Werth 90^0 zusammen; alle Ebenen des Büschels sind zu Π normal.

Ist aber g parallel zu Π, so erweitert sich das Intervall auf den ganzen Quadranten, und Ebenen jeder Neigung gegen Π sind im Büschel enthalten, zu Π parallele Ebenen nur in diesem Falle.

17. Von den Geraden, welche in Π durch die Spur von g gehen, bildet, wie schon gesagt, die Projection g_1 von g den kleinsten Winkel mit g, nämlich den Neigungswinkel β von g gegen Π; den grössten Winkel bildet mit g die zu g_1 senkrechte s_k, nämlich einen rechten; diese ist, wie wir sahen, auch zu g senkrecht. *Also sind von den Strahlen* s *des Büschels in* Π *um* S_g *diejenigen mit der kleinsten und grössten Neigung* β, 90^0 *gegen* g *wiederum rechtwinklig zu einander.* Der $\sphericalangle PS_gS_f$ der obigen Figur ist der Winkel (g, s); mit dem Winkel (g_1, s) bleibt und wächst P_1S_f, PS_f und $\sphericalangle PS_gS_f$. Und so sehen wir, dass *in dem Strahlenbüschel um* S_g *in* Π *von den Zwischen-Neigungswinkeln gegen* g *jeder durch zwei Strahlen* s *vertreten ist, deren Winkel diejenigen Strahlen zu Halbirungslinien haben, welche die Grenz-Neigungswinkel* β *und* 90^0 *mit* g *bilden.*

Solche zwei Strahlen des Büschels haben gleiche Neigungswinkel gegen g, welche Spuren von Ebenen durch g sind, die gleiche Neigung gegen Π haben. Die Ebenen durch g von grösster und kleinster Neigung gegen Π gehen durch die Strahlen kleinster und grösster Neigung gegen g, und wenn die Neigung einer Ebene durch g gegen Π abnimmt, so nimmt die Neigung ihrer Spur gegen g zu.

Man kann den Begriff des Winkels zweier Geraden auch auf den Fall, dass sie nicht in derselben Ebene liegen, auf windschiefe Geraden ausdehnen. *Der Winkel zweier windschiefen Geraden ist der, welcher von zwei zu ihnen parallelen sich schneidenden Geraden gebildet*

wird, oder (was dasselbe) der entsteht, wenn eine von ihnen parallel verschoben wird, bis sie die andere schneidet. Also kann man unsern Satz erweitern:

Hat eine Gerade g gegen die Ebene Π — denn die bisher als Projectionsebene bezeichnete Ebene kann ja jede beliebige Ebene sein — *die Neigung* β, *so giebt es in* Π *nur Gerade, welche mit g Winkel von* β *bis* 90° *bilden.* Die, welche die Minimalneigung β besitzen, sind zur Projection von g auf Π parallel, die, welche die Maximalneigung 90° haben, auf derselben senkrecht; jede Zwischenneigung ist durch zwei Richtungen in Π vertreten, die mit jeder der beiden eben genannten Richtungen gleiche Winkel bilden.

Ist $\beta = 90^0$, so haben alle Geraden in Π gegen g die Neigung 90°.

Wenn aber g zu Π parallel ist, so giebt es in Π Geraden von allen Neigungswinkeln (von 0° bis 90°) gegen g, solche vom Neigungswinkel 0° nur in diesem Falle.

18. *Wenn eine Gerade p auf einer Ebene* Π *senkrecht steht, so ist der Winkel* (g, p), *den eine andere Gerade g mit p bildet, das Complement des Winkels* (g, Π), *den g mit* Π *bildet; und der Winkel* (E, p) *einer Ebene* E *gegen p ist das Complement des Winkels* (E, Π) *dieser Ebene gegen* Π.

Wenn g das Loth p nicht trifft, so werde sie parallel verschoben, bis sie es thut (in P), wodurch die Winkel (g, p) und (g, Π) keine Aenderung erleiden. Sind F und S die Spuren von p und g in Π, so ist FS die Projection g_1 von g, also PSF der $\sphericalangle (g, \Pi)$, andererseits ersichtlich FPS der $\sphericalangle (g, p)$; sie ergänzen sich zum Rechten, da $p \perp FS$ ist.

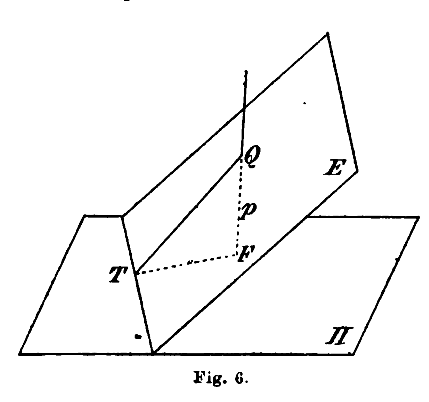


Fig. 6.

Ferner sei Q (Fig. 6) der Punkt pE, in dem p die Ebene E trifft, dann ziehe man durch Q die Spurnormale in E gegen Π, deren Spur T und Projection FT ist; so ist $\sphericalangle QTF$ der Neigungswinkel (E, Π) (Nr. 15); also steht dessen Ebene senkrecht auf E, mithin ist sie die Ebene, welche p auf E projicirt, also QT die Projection von p auf E, demnach TQF der Neigungswinkel (E, p). TQF und QTF sind Complementwinkel.

Die Lothe auf zwei Ebenen bilden denselben (spitzen) Winkel, wie die Ebenen selbst.

Die Ebenen seien E und Φ, die Lothe p und q. Weil q und Φ rechtwinklig sind, so ist $\sphericalangle(p,q) = 90^0 - \sphericalangle(p,\Phi)$, und weil p und E senkrecht sind, so ist $\sphericalangle(\mathsf{E},\Phi) = 90^0 - \sphericalangle(p,\Phi)$; daher $\sphericalangle(p,q) = \sphericalangle(\mathsf{E},\Phi)$.

19. Es seien nun g und l zwei — im allgemeinen windschiefe — Geraden; wir wollen die Winkel der Ebenen durch g gegen l betrachten. Sei Π eine zu l normale Ebene, so ist nach Nr. 18 der Winkel (l, E) einer Ebene E gegen l das Complement von (E, Π).

Wenn E durch g geht, so bewegt sich (E, Π) zwischen (g, Π) und 90^0 (Nr. 16) oder, da (g, Π) und (g, l) auch complementär sind, zwischen $90^0 - (g, l)$ und 90^0, folglich (l, E) zwischen (g, l) und 0^0.

Man kann also durch g nicht Ebenen legen, welche mit l einen grösseren Winkel bilden als (g, l).

Die Ebene durch g, welche mit l den Minimalwinkel 0^0 bildet, ist die (einzige) zu l parallele; sie steht auf der zu l normalen Ebene Π senkrecht. *Die Ebene durch g, welche mit l den grösstmöglichen Winkel, nämlich (l, g), bildet, steht auf jener senkrecht;* denn sie muss mit Π den kleinstmöglichen Winkel (g, Π) bilden (Nr. 16).

Die Zwischenneigungen sind wieder stets durch je zwei Ebenen vertreten, deren Winkel durch die beiden Ebenen mit der Maximal- und der Minimalneigung gegen l halbirt werden.

Nur wenn g mit l einen rechten Winkel bildet, geht durch sie eine Ebene, welche auf l senkrecht ist; sind ja doch alle Geraden einer Ebene, die auf einer Gerade senkrecht stehen, unter 90^0 gegen dieselbe geneigt (Nr. 17).

In diesem Falle kommen unter den Neigungen der Ebenen durch g gegen l alle von 0^0 bis 90^0 vor.

Sind dagegen g und l parallel, bilden sie also den Winkel 0^0, so bilden auch alle Ebenen durch g mit l diesen Winkel, sind mit l parallel, wie bekannt.

20. Es seien zwei gleiche Winkel gegeben und die Schenkel des einen unter denselben Winkeln gegen Π geneigt wie des des andern; ferner mögen die durch die Scheitel zu Π parallel gelegten Ebenen beide schneiden oder beide nicht schneiden. Die Schenkel haben dann auch gleiche Neigungen gegen die aus den Scheiteln gefällten Projectionslothe, und die dreiseitigen Ecken, welche die Schenkel und solche Halbstrahlen der Lothe, mit denen gleiche Winkel von den Schenkeln gebildet werden, zu Kanten haben, sind congruent; daher sind auch die Flächenwinkel an den Lothen, d. h. die Projectionen der Winkel, gleich, sowie auch die Neigungswinkel der Lothe gegen die Gegenflächen und deren Complemente, die Neigungswinkel der Ebenen der Winkel gegen die Projectionsebene, also:

Wenn zwei gleiche Winkel mit gleichen Neigungen der Schenkel gegen die Projectionsebene derart liegen, dass beide Winkel durch die durch den Scheitel zur Projectionsebene parallel geführte Ebene getheilt oder beide nicht getheilt werden, so haben diese Winkel gleiche Projectionen und ihre Ebenen gleiche Neigungen gegen die Projectionsebene.

21. Wir kehren zur Betrachtung der Ebene E zurück und schliessen an Nr. 13 an.

Denken wir uns die Ebene E (durch ihren spitzen oder ihren stumpfen Flächenwinkel mit Π) um ihre Spur s gedreht, bis sie mit der Projectionsebene zusammenfällt Es ist ersichtlich, dass bei der Drehung alle Gebilde in E in ihrer Grösse und gegenseitigen Lage unverändert bleiben, die Punkte auf s verändern nicht einmal ihre Lage im Raume. Wenn also eine Gerade g in E den Punkt S (auf s) zur Spur hat, so geht auch die Gerade g_0, mit der sie nach Vollendung der Drehung zusammenfällt, *ihre Umlegung,* durch S und trifft sich dort also mit der Projection g_1 von g. Der Winkel, den g mit s bildet, verändert sich nicht: $\sphericalangle (g, s) = (g_0, s)$.

Im allgemeinen ist nun $\sphericalangle (g, s)$ und also auch $\sphericalangle (g_0, s)$ von $\sphericalangle (g_1, s)$ verschieden; also fällt g_0 nicht auf g_1. Ist aber g eine Spurnormale f von E, so ist $\sphericalangle (f, s) = \sphericalangle (f_1, s) = 90^0$ (Nr. 14), mithin ist f_0 mit f_1 identisch.

Die Spurnormalen einer Ebene kommen also beim Umlegen derselben auf ihre Projectionen zu liegen.

Ist $h \parallel s$, so ist auch $h_1 \parallel s$, oder aber $h_0 \parallel s$.

Die Umlegung g_0 einer Gerade g in E und ihre Projection g_1 treffen sich auf der Spur s von E oder sind beide zu ihr parallel.

Dies gilt auch bei der Centralprojection und der allgemeinen Parallelprojection, aber die eben ausgesprochene Eigenschaft der Spurnormalen besteht nur bei der Orthogonalprojection.

Sei nun A ein Punkt von E, A_1 seine Projection, A_0 seine Umlegung, f die durch A gehende Spurnormale, welche sich auf die durch A_1 gehende Projection f_1 legt. Man sieht demnach, dass die Verbindungslinie der Projection A_1 eines Punktes A in E und seiner Umlegung A_0 mit E senkrecht zur Spur s von E ist. Ist A' der Punkt, wo diese Linie die s trifft, so ist ersichtlich

$$\frac{A'A_1}{A'A_0} = \frac{A'A_1}{A'A} = \cos\alpha,$$

wenn α der Neigungswinkel (E, Π) ist.

Die Umlegung eines Punktes von E liegt also stets auf dem Lothe, das aus der Projection auf die Spur von E gefällt ist, und zwar weiter als die Projection.

Construirt man aus der Entfernung A_1A' als Kathete und dem Neigungswinkel α als anliegendem Winkel das rechtwinklige Dreieck, so giebt dessen Hypotenuse die Entfernung A_0A'.

Der Fall, wo die Ebene E senkrecht zu Π ist, schliesst sich wohl der obigen Formel an (A_1 liegt auf s, also $A'A_1 = 0$), aber diese Construction wird illusorisch. Er wird also jetzt ausgeschlossen und später besonders betrachtet (Nr. 28).

A_0 und A_1 liegen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von s, je nachdem die Umlegung um den spitzen oder den stumpfen Winkel (E, Π) geschieht. Man zieht die Umlegung um den stumpfen Winkel vor, weil man dann meistens nicht collidirende Figuren in der Umlegung und der Projection bekommt.

Statt das rechtwinklige Dreieck aus einer Kathete und dem anliegenden Winkel zu construiren, kann man es auch (und dies geschieht sogar in den meisten Fällen) aus derselben Kathete $A'A_1$ und der andern AA_1, dem Abstande des Punktes A von der Projectionsebene, construiren, denn derselbe wird aus einer zweiten Projectionsebene (s. zweiten Abschnitt) bekannt sein. Zur Herstellung des Dreiecks kann man den rechten Winkel $(A'A_1, s)$ benutzen.

Umgekehrt kann man aber auch, wenn die Umlegung A_0 und der Winkel α der Ebene bekannt ist, aus dem Lothe A_0A' als Hypotenuse und dem spitzen Winkel α die beiden Katheten finden; die anliegende giebt die Entfernung $A'A_1$ und damit die Projection A_1, die andere den Abstand des nach A_0 umgelegten Punktes A in E von Π.

22. Als Anwendung dieser Umlegungs-Construction wollen wir *die constructive Ermittelung der Flächenwinkel (Winkel) einer dreikantigen Ecke, deren Kantenwinkel (Seiten) gegeben sind*, anschliessen. Wir nennen die drei Kanten a, b, c und ebenso die zugehörigen Flächenwinkel, während die gegenüberliegenden Ebenen und Kantenwinkel α, β, γ heissen mögen. Einen von ihnen, β, wollen wir in Π gelegt (Fig. 7) denken, und den beiden andern gleiche seien zu beiden Seiten angelegt, so dass sie als Umlegungen der Winkel α, γ um die Spuren c, a nach aussen aufgefasst werden können; wir nennen sie, die verschiedenen Umlegungen unterscheidend, α_0', γ_0''; es sind b_0', b_0'' die beiden Umlegungen der Kante b. Zwei gleich weit vom Scheitel S entfernte Punkte P_0', P_0'' auf ihnen sind daher Umlegungen desselben Punktes P auf b. Der Punkt P_1, in dem die Lothe aus P_0' auf c und aus P_0'' auf a, deren Fusspunkte P_c und P_a seien, sich treffen, ist die Projection dieses Punktes P auf Π. Das rechtwinklige Dreieck $P_cP_1P_0'''$, in welchem $P_cP_0''' = P_cP_0'$ ist, auch eine Umlegung, liefert in seinem Winkel bei P_c den Flächenwinkel an der

Kante c oder seinen Nebenwinkel, je nachdem P_1 auf der andern Seite von c liegt als P_0' oder auf derselben. Aehnlich wird $a = \alpha_0^{IV}$ construirt. Um die Grösse des Winkels bei b zu ermitteln, denken wir ihn am Punkte P construirt; die Lothe in P_0' auf b_0', in P_0'' auf b_0'' sind die umgelegten Schenkel, die Schnitte S_c, S_a mit c, a ihre Spuren, also $S_c S_a$ die Spur der Ebene dieses Winkels und aus dem Abstande $P_1 P'$ des P_1 von ihr und der Entfernung $PP_1 = P_0''' P_1 = P_0^{IV} P_1$ als Katheten construiren wir die Hypotenuse $P' P_0^V$ auf $P_1 P'$ und haben in $S_c P_0^V S_a$ den gesuchten Winkel $b = b_0^V$.

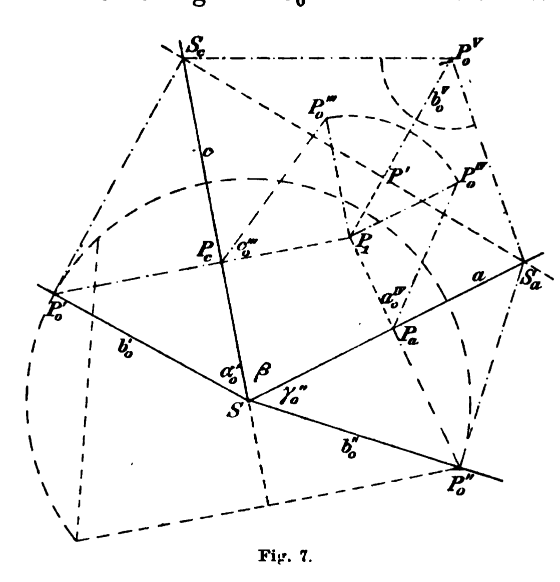


Fig. 7.

Zur Möglichkeit der Auflösung ist nothwendig, dass $P_0' P_c > P_c P_1$ und $P_0'' P_a > P_a P_1$ ist; man weise nach, dass das bedingt, dass einer (und dann jeder) der drei Winkel α, β, γ zwischen der Summe und der Differenz der beiden anderen liegt.

23. In Nr. 21 ergaben sich uns *zwei in* Π *befindliche ebene Systeme oder „Felder" von Punkten und Geraden, von denen das eine aus den Umlegungen, das andere aus den Projectionen der Punkte und Geraden einer Ebene* E *besteht. Jedem Punkte* P_0, *jeder Gerade* g_0 *des einen Systems entspricht ein Punkt* P_1, *bezw. eine Gerade* g_1 *des andern Systems*, welche beide demselben Punkte P, bezw. derselben Gerade g in E entsprechen, *und umgekehrt. Liegt* P_0 *auf* g_0, *so liegt* P *auf* g und P_1 *auf* g_1; *und umgekehrt, liegt* P_1 *auf* g_1, *so muss* P *auf* g (Nr. 6,8), also auch P_0 *auf* g_0 liegen, weil die Umlegung daran nichts ändert.

Entsprechende Geraden g_0 *und* g_1 *treffen sich auf* s oder sind zu s parallel (Nr. 21); *die Verbindungslinien entsprechender Punkte* P_0 *und* P_1 *sind* alle auf s normal (Nr. 21), also *unter einander parallel.*

Diese Beziehung der beiden Felder nennt man *homologische* (oder perspective) *Affinität.*

*Die Umlegung einer Ebene und ihre Projection sind also (homologisch) affin.**)

Die Spur s der Ebene heisst die *Affinitätsaxe;* alle ihre Punkte entsprechen sich selber.

Die parallelen Verbindungslinien entsprechender Punkte, welche den Spurnormalen von E und also (Nr. 21) sich selbst entsprechen, heissen *Affinitätsstrahlen.*

Wird bei der schrägen Parallelprojection dieselbe Umlegung mit einer Ebene vorgenommen, wie eben bei der orthogonalen, so ergiebt sich gleichfalls Affinität, aber nicht mit zu s normalen Affinitätsstrahlen; bei der Centralprojection aber haben die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen Punkt (Centrum) gemein, nicht die Richtung. Die Beziehung heisst dann Homologie (oder auch perspective oder centrische Collineation). Wir werden sie in Nr. 120 genauer betrachten.

24. *Kennt man bei der Affinität die Axe s, die Richtung der Affinitätsstrahlen* (welche in unserem Falle normal zur Axe ist) *und ein Paar entsprechender Punkte A_0 und A_1* — wobei also in unserem Falle A_0 stets weiter von der Axe s entfernt ist als A_1 —, *so ist die ganze Affinität bestimmt;* d. h. man kann zu jedem Punkte, jeder Gerade des einen Feldes den entsprechenden Punkt, die entsprechende Gerade im andern construiren (Fig. 8). Es sei X_0 ein beliebiger zweiter Punkt des ersten Feldes — des hier durch die Umlegung entstandenen —, so findet man X_1 als den Schnitt des Affinitätsstrahls durch X_0, also des Loths aus X_0 auf s mit der Gerade,

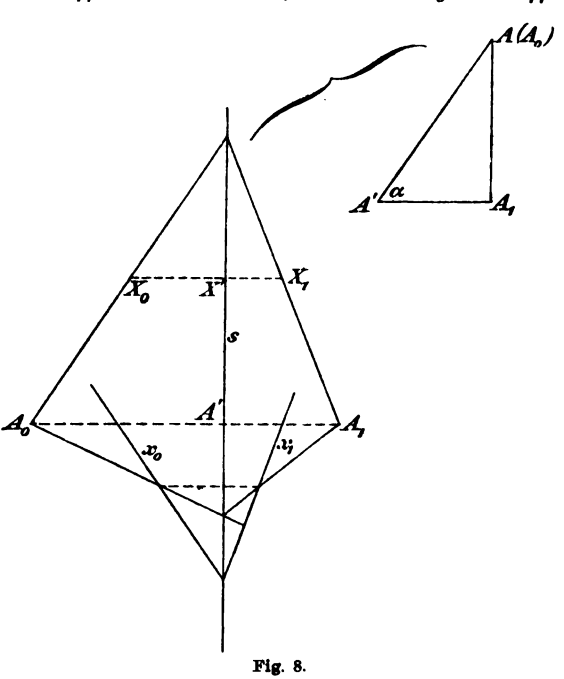


Fig. 8.

*) Da in diesem Buche keine Gelegenheit ist, die *allgemeine* Affinität kennen zu lernen, so können wir den den speciellen Fall charakterisirenden Zusatz weglassen.

welche der A_0X_0 entspricht, mithin durch X_1 geht und sich mit A_0X_0 auf s begegnet (bezw. zu s parallel ist, wenn das bei A_0X_0 der Fall ist). In umgekehrter Weise findet man aus X_1 den Punkt X_0. Soll zu einer Gerade x_0 die entsprechende x_1 gesucht werden, so suche man den entsprechenden Punkt irgend eines Punktes auf x_0 und verbinde ihn mit dem Schnittpunkte x_0s, bezw. zieht durch ihn zu s die Parallele, wenn $x_0 \parallel s$ ist; ebenso findet man x_0 aus x_1.

Dass die Affinität bestimmt sein musste, wenn die Axe und ein Paar entsprechender Punkte A_0, A_1 (ausser der hier von selbst gegebenen Richtung der Affinitätsstrahlen) bekannt ist, erhellt auf der Stelle; denn ist wieder A' der Punkt (A_0A_1, s), so geben $A'A_0$ $(= A'A)$ als Hypotenuse und A_1A' als eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks in der andern Kathete AA_1 den Abstand des Punktes A, dessen Projection A_1 ist, von Π. Nun giebt es zwar zwei Punkte zu beiden Seiten von Π; jeder von ihnen liefert mit s eine Ebene; aber es ist ersichtlich, dass die aus den (gleichartigen) Umlegungen dieser beiden Ebenen entstandenen Felder identisch sind; zwei Punkte in den beiden Ebenen, welche dieselbe Projection haben, kommen stets nach der Umlegung an dieselbe Stelle.

Besitzt man also ein Paar entsprechender Punkte auf Grund der Construction von Nr. 21 (mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks), so kann man auf die jetzt angegebene Weise zu jedem weitern Punkte, zu jeder Gerade der Umlegung oder der Projection den entsprechenden Punkt, die entsprechende Gerade der Projection, bezw. der Umlegung construiren.

Man kann aber auch — und dies wird sich für die graphische Ausführung empfehlen — durchweg mit den rechtwinkligen Dreiecken arbeiten, weil man, besonders wenn aus der Umlegung die Projection zu construiren ist, dann gleich die Abstände der Punkte von der Projectionsebene erhält, was für die zweite Projectionsebene (s. nächsten Abschnitt) wichtig sein wird, und die Affinität als — nothwendige — Controlle benutzen.

25. In der Ebene E sei ein *Kreis* K (Fig. 9, Taf. I, wo er mit E umgelegt ist) gegeben; wir wollen *seine orthogonale Projection* K_1 betrachten. Die Durchmesser des Kreises projiciren sich in Strecken, welche durch die Projection C_1 des Centrums C ebenfalls halbirt werden; dieselben heissen auch für die Curve K_1 *Durchmesser* und C_1 das *Centrum* von K_1. Aber die Durchmesser von K_1 sind nicht gleich, weil sie verschiedene Neigungen gegen Π haben; die beiden zu einander senkrechten Durchmesser a und b von K, welche zu der Spur s parallel, bezw. normal sind, haben, weil sie die kleinste und grösste

Neigung gegen Π besitzen, zu Projectionen den grössten und kleinsten Durchmesser von K_1; dieselben sind nach Nr. 13 ebenfalls zu einander senkrecht: sie heissen *die Axen der Kreisprojection* (grosse, kleine Axe). Die Längen der *halben Axen* bezeichnen wir auch mit a, b; ist r der Radius des Kreises und α der Winkel (E, Π), so ist $a = r$, $b = r \cos \alpha$.

Sonst projiciren sich zwei zu einander normale Durchmesser nicht in wieder zu einander normale; aber eine andere Eigenschaft bleibt erhalten. Von zwei zu einander normalen Durchmessern eines Kreises halbirt jeder die dem andern parallelen Sehnen und die Tangenten in seinen Endpunkten sind zum andern parallel. Man nennt deshalb diese Durchmesser *conjugirte.* Da Parallelismus und Halbirung durch Parallelprojection nicht verloren gehen, so gilt auch für die Durchmesser der Kreisprojection, welche von conjugirten Durchmessern des Kreises herrühren, dass jeder die dem andern parallelen Sehnen halbirt. Und da die Tangente einer Curve definirt wird als die Verbindungslinie zweier unendlich naher Punkte der Curve, so ist zunächst ersichtlich, dass die Projection der Tangente einer Curve Tangente an die Projection ist; ferner dass die Tangenten an die Kreisprojection in den Endpunkten des einen von zwei Durchmessern, welche Projectionen zweier conjugirter Kreisdurchmesser sind, dem andern parallel sind.

Kurz: *Conjugirte Durchmesser eines Kreises projiciren sich wieder als conjugirte Durchmesser.*

Dass aber die Tangente auf dem nach ihrem Berührungspunkte gehenden Durchmesser senkrecht steht, geht nicht vom Kreise auf seine Projection über.

Die Projection des Kreises ist die Curve, welche *Ellipse* genannt wird.

Jede zum spurparallelen Durchmesser von K normale Sehne von der Länge $2s$ projicirt sich in eine zur grossen Axe von K_1 normale Sehne von der Länge $2s_1 = 2s \cos \alpha$; sodass $s_1 : s = b : a$. Daraus folgt die bekannte *Construction der Ellipse:* Man schlägt über den beiden Axen $2a$, $2b$ als Durchmessern Kreise, schneidet sie mit einem Halbstrahle aus dem Mittelpunkt in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, zieht durch $\mathfrak{A}$ die Senkrechte zur grossen Axe, durch $\mathfrak{B}$ die zur kleinen; der Schnittpunkt beider ist ein Punkt der Ellipse.

Bei schräger Parallelprojection ergiebt sich auch eine Ellipse aus dem Kreise, und was über die conjugirten Durchmesser gesagt ist, bleibt bestehen; nur die rechtwinkligen conjugirten Durchmesser, die Axen, ergeben sich nicht aus den Durchmessern des Kreises, welche spurparallel und spurnormal sind.

In Folge der Affinität ist ersichtlich, dass jede Tangente des um-

gelegten Kreises sich mit der Tangente an die Projection im entsprechenden Punkte, weil sie entsprechende Geraden sind, auf der Spur trifft (bez. beide zu derselben parallel sind); was für die Construction der Tangente wesentlich ist. Sollte der Begegnungspunkt mit s unbequem liegen, so würde man zur Bestimmung der Tangente noch von einem beliebigen zweiten Punkte die Projection construiren.

Zur Uebung mag noch empfohlen werden: die Curve in einer (durch Spur und Neigungswinkel) gegebenen Ebene zu zeichnen, deren Projection ein Kreis ist.

Sie ist ebenfalls eine Ellipse; aber sie hat ihre kleine Axe parallel zur Spur, die grosse senkrecht darauf.

26. Es sei F der Inhalt eines Trapezes in der Ebene E, dessen parallele Gegenseiten g_1, g_2 zur Spur parallel sind; die Höhe sei h. Es projicirt sich in ein Trapez vom Inhalte F_1 mit den ebenfalls parallelen Gegenseiten g_1, g_2 und der Höhe $h_1 = h \cos\alpha$; denn der rechte Winkel zwischen den Grundlinien und der Höhe bleibt erhalten; α ist wiederum der Winkel (E, Π), unter dem ja auch h gegen Π geneigt ist. Daher ist:

$$F_1 = \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2) h \cos\alpha = F \cos\alpha .$$

Analoges gilt für ein Dreieck, dessen Grundlinie spurparallel ist. Jede andere geschlossene ebene Figur theilt man durch spurparallele Geraden — die, wenn die Figur krummlinig umschlossen ist, unendlich nahe liegen — in solche Trapeze und Dreiecke. Weil die erhaltene Formel für die Theilfiguren und ihre Projectionen gilt, so gilt sie auch für die ganzen Figuren. Also:

Das Verhältniss des Flächeninhalts der Orthogonalprojection einer ebenen Figur zu dem der Figur selbst ist gleich dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebene der Figur gegen die Projectionsebene.

Der *Inhalt der Ellipse* als Projection eines Kreises vom Radius r ist also $r^2 \cos\alpha \cdot \pi$, mithin $ab\pi$.

Wenn die Ebene einer Figur zur Projectionsebene parallel ist, so ist $F_1 = F$ (Nr. 8), also $\cos\alpha = 1$, $\alpha = 0^0$. —

Auch bei der schrägen Parallelprojection ist das genannte Verhältniss für alle Figuren einer Ebene (und der zu ihr parallelen Ebenen) ein constantes.

27. Mit Hilfe der Umlegung mag noch eine Vergleichung der Grösse eines Winkels und seiner Projection vorgenommen werden. Wir nehmen an, dass beide Schenkel des Winkels die Spur seiner Ebene treffen; dasselbe geschieht dann auch in der Projection. In den anderen Fällen ersetzt man, um sie auf diesen Fall zurückzuführen,

den Winkel durch seinen Scheitel- oder Nebenwinkel. Die Umlegung der Winkelebene geschehe stets um den spitzen Neigungswinkel, so dass Umlegung und Projection auf derselben Seite liegen.

DFE sei der Winkel und D, E die Schnittpunkte der Schenkel mit der Spur. Die beiden Dreieckswinkel D, E seien beide spitz (oder einer ein rechter), so vergrössert sich der Winkel F durch die Orthogonalprojection; denn die beiden andern Winkel D, E verkleinern sich, ev. einer bleibt unverändert (Nr. 14); man kann die Vergrösserung aus der Lage der Umlegung und Projection unmittelbar erkennen.

Sei φ der Winkel, φ_1 seine Projection; denken wir uns den Neigungswinkel α der Ebene von 0^0 bis 90^0 wachsend, so wächst, wenn φ constant ist, φ_1 von φ bis 180^0; wenn aber φ_1 constant ist, fällt φ von φ_1 bis 0^0; nur wird beim Neigungswinkel 90^0 φ_1 nicht mehr Projection eines in der senkrechten Ebene befindlichen Winkels genannt werden können.

Einer von den Dreieckswinkeln D, E sei stumpf; F_0 und F_1 seien Umlegung und Projection des Scheitels; so trifft F_0F_1 die Spurlinie

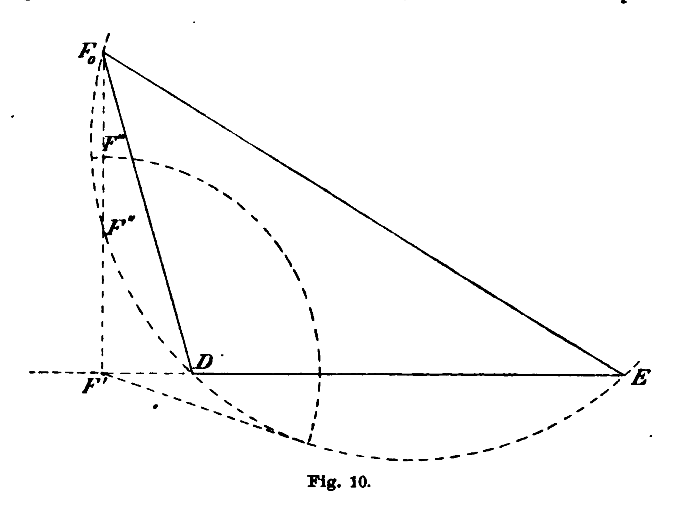


Fig. 10.

ausserhalb DE in F'. Wir nehmen an, φ sei constant, also F_0 fest, F_1 beweglich und zwar offenbar nur zwischen F' und F_0; es sind zwei Fälle zu unterscheiden: der zweite Schnittpunkt F'' des Kreises durch D, E, F_0 mit F_0F' liegt zwischen F' und F_0 oder nicht. Im zweiten Falle liegt F_1 stets ausserhalb dieses Kreises, daher ist $\varphi_1 = DF_1E$ stets $< \varphi = DF_0E$, und während α von 0^0 bis 90^0 wächst, fällt φ_1 von φ bis 0^0. Im ersten Falle hingegen (Fig. 10) ist φ_1, so lange F_1 zwischen F_0 und F'' sich bewegt, $> \varphi$; der durch D und E gelegte Kreis, welcher die Senkrechte $F'F_1F_0$ berührt, giebt in seinem

Berührungspunkte F''', der zwischen F_0 und F'' liegt, die Lage von F_1 an, bei welcher φ_1 das Maximum erreicht; zwei gleich weit von F''' abstehende Punkte gehören gleichen Winkeln φ_1 an; ist F_1 in F'', so ist $\varphi_1 = \varphi$; liegt F_1 zwischen F'' und F', so ist $\varphi_1 < \varphi$. Also während α von 0^0 bis 90^0 wächst, wächst φ_1 von φ bis zu dem Maximalwerth $DF'''E$ und fällt, zunächst die eben erhaltenen Werthe bis φ nochmals durchlaufend, bis 0^0.

Umgekehrt, ist φ_1 constant, so sei F^{IV} der zweite Schnittpunkt des Kreises DF_1E mit $F'F_1$. Liegt F^{IV} zwischen F' und F_1, so ist, weil F_0 jenseits F_1 liegen muss, φ stets $< \varphi_1$ und fällt von φ_1 bis 0^0. Liegt aber F^{IV} jenseits F_1, wo dann auch F''' liegen muss, so wächst φ zunächst von φ_1 bis zu einem Maximalwerthe $DF'''E$ und fällt dann bis 0^0.

28. *Steht eine Ebene* E *senkrecht auf* Π, so reducirt sich die ganze Projection auf die Spur; es kommt also durch Umlegung und Projection keine Affinität zu stande. Die rechtwinkligen Dreiecke, welche zur Construction der Umlegung von Punkten dienen (Nr. 21), schrumpfen, weil die in Π befindliche Kathete null ist, in gerade Linien zusammen; um *die Umlegung* zu bewirken, ist es nothwendig, die in E hineinfallenden und auf der Spur senkrechten Abstände der Punkte von Π zu kennen. Kennt man diese — und sobald mit zwei Projectionsebenen gearbeitet wird, sind sie bekannt —, so ist die Umlegung einer Figur in einer zu Π senkrechten Ebene wesentlich einfacher, als in einer zu Π schrägen Ebene; man hat nur diese Abstände in den Projectionen der Punkte, die ja auf der Spur liegen, senkrecht zu dieser Spur zu errichten, und zwar nach derselben oder verschiedenen Seiten der Spur, je nachdem die Abstände auf derselben oder verschiedenen Seiten der Projectionsebene liegen.

Kennt man z. B. die Projection einer Strecke und die Abstände der Endpunkte von Π, so erhält man durch die Umlegung der projicirenden Ebene *die wahre Länge der Strecke und ihren Neigungswinkel gegen ihre Projection, d. i. gegen die Projectionsebene* (Nr. 11).

29. Statt eine Ebene E um ihre Spur s in die Projectionsebene Π umzulegen, empfiehlt es sich oft — besonders wenn der beschränkte Raum auf dem Zeichenblatte es erfordert —, sie *um eine Spurparallele h in die durch dieselbe gehende Parallelebene* Π* *zu* Π *umzulegen;* Π* ist eine Projectionsebene, durch welche wir Π vorübergehend ersetzen; h ist die Spur von E in Π*. Die Umlegung in Π* und die Projection in Π* sind ersichtlich affin mit h als Axe. Projiciren wir nun diese beiden Figuren von Π* in Π, so erhalten wir zwei zu ihnen congruente Figuren, die daher auch affin sind mit h_1 als Axe und dazu

senkrechten Affinitätsstrahlen. An Stelle der Abstände eines Punktes P von Π und s und der Projection P_1 von s sind die (gewöhnlich kleineren und deshalb bequemeren) Abstände des P von Π^* und h, des P_1 von h_1 getreten (Fig. 11).

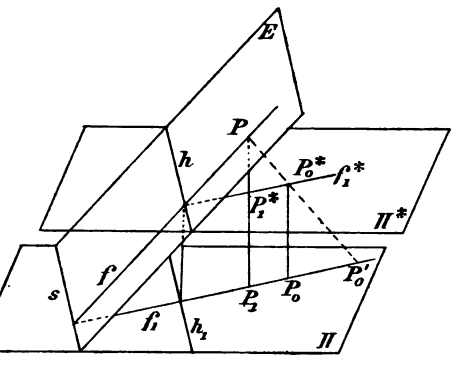


Fig. 11.

P_0^* ist die Umlegung von P in Π^*, P_0 die Projection von P_0^* in Π, nicht die Umlegung von P in Π; diese ist P_0'.

Steht die umzulegende Ebene auf Π normal, so ist h_1 mit s identisch. Will man die *wahre Länge einer Strecke* ermitteln, so wird die projicirende Ebene in die durch den einen Endpunkt gehende Π^* umgelegt; es tritt dann an Stelle des (ev. verschlungenen) Trapezes, das von der Projection der Strecke, den umgelegten Abständen der Endpunkte und der umgelegten Strecke selbst eingeschlossen ist, ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Projection und die *algebraische* Differenz der Endpunktsabstände sind und dessen Hypotenuse die umgelegte Strecke ist. Diese Construction führt besonders dann zur Raumersparniss, wenn die Endpunkte auf derselben Seite von Π liegen, die algebraische Differenz eine wirkliche Differenz ist; während im andern Falle diese Figur oft zu gross wird und die Trapezfigur vorzuziehen ist.

Man erhält auch hier den Neigungswinkel der Gerade gegen die Π (oder, was dasselbe, gegen Π^*).

30. Ist eine Gerade g zu einer Ebene E im Punkte F normal, so ist sie zu allen durch F in E gezogenen Geraden normal, also auch zu der durch F gehenden Spurparallele h; der rechte Winkel (g, h) bleibt, weil der eine Schenkel zur Projectionsebene parallel ist, erhalten (Nr. 13); g_1 ist demnach senkrecht zu h_1, mithin auch zu den Projectionen aller Spurparallelen und zur Spur von E.

Wenn also eine Gerade g zu einer Ebene E *normal ist, so ist ihre Orthogonalprojection g_1 zu der Spurlinie s und den Projectionen der Spurparallelen von* E *normal.*

Dieser sehr werthvolle Satz gilt nur für die Orthogonalprojection; und da jede g_1 in Π Projection von ∞^2 Geraden ist, so *ist seine Umkehrung nicht richtig.*

Die durch den Fusspunkt F gehende Spurnormale f von E hat,

weil f_1 durch F'_1 geht und zu s normal ist, dieselbe Projection wie g; liegen ja auch ersichtlich beide in derselben zu Π normalen Ebene.

Kennt man den Neigungswinkel α und die Spur s einer Ebene E, ferner die Projection P_1 eines Punktes P und den Abstand desselben von Π, so ist leicht sein Abstand von E zu ermitteln; denn ist F der Fusspunkt dieses Abstandslothes und S der des von P_1 auf s gefällten Lothes, so sind die für die Construction des (bisweilen verschlungenen) Vierecks PP_1SF nothwendigen Stücke bekannt.

31. a) Steht E normal auf Π, so ist der Fusspunkt des aus P_1 auf die Spur s gefällten Lothes die Projection des Fusspunktes des aus P auf E gefällten Lothes, und jenes Loth ist diesem gleich, weil letzteres parallel zu Π ist.

b) Ist eine Gerade g normal zu Π, so ist die Projection des aus einem Punkte P auf sie gefällten Lothes die Verbindungslinie von P_1 mit dem Punkte, in den sich g projicirt; und auch hier ist die Projection dem Lothe gleich.

c) Wenn eine Gerade g parallel zu Π ist, so ist das aus P_1 auf g_1 gefällte Loth die Projection des aus P auf g gefällten Lothes (Nr. 13).

d) Wenn E zu Π normal und g zu E parallell ist, so ist die Projection von g zu der Spur (Projection) von E parallel, denn die projicirende Ebene von g ist mit E parallel.

e) Sind zwei Ebenen E und Φ beide auf Π normal, so giebt der Winkel ihrer Spuren ihren Neigungswinkel; weil Π zur Schnittlinie $\mathsf{E}\Phi$ senkrecht ist.

f) Wenn zwei Ebenen E und Φ zu einander normal sind und die eine zu Π senkrecht ist, so bilden die Spuren einen rechten Winkel; in der That, es sei Φ die zu Π senkrechte, sie ist dann auf der Schnittlinie von E und Π, der Spur von E, senkrecht, und folglich ist diese auch normal zur Spur von Φ.

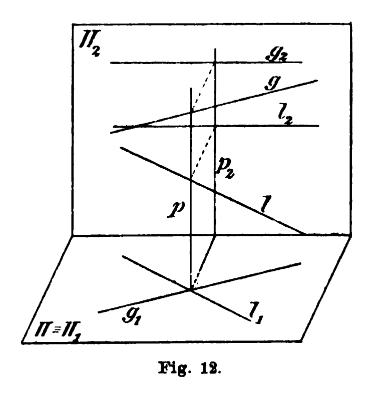


Fig. 12.

32. Wenn zwei (im allgemeinen windschiefe) Geraden g und l zu Π parallel sind (Fig. 12), so ist der Winkel ihrer Projectionen, welche ihnen bez. parallel sind, gleich ihrem eigenen Winkel (Nr. 17). Durch jede der beiden Geraden geht eine Ebene Υ, bez. λ, welche zur andern parallel ist, die, welche sie in der Richtung dieser andern projicirt. Diese beiden Ebenen Υ, λ sind einander parallel, weil die

Richtungen von g und l in beiden enthalten sind, und sind auch zu Π parallel. Jede Gerade, welche mit g und l rechte Winkel bildet, ist zu γ, λ und Π normal, projicirt sich demnach als Punkt; diejenige (einzige) p unter diesen Geraden, welche zugleich beide schneidet, hat den Punkt $g_1 l_1$ zur Projection.

Nehmen wir eine andere Projectionsebene dazu, welche zur früheren senkrecht, also zu diesem gemeinsamen Loth parallel ist. Da jeder der beiden rechten Winkel (g, p), (l, p) einen zu dieser Projectionsebene parallelen Schenkel hat, so sind ihre Projectionen (g_2, p_2), (l_2, p_2) auf die zweite Projectionsebene ebenfalls rechte Winkel, also $g_2 \parallel l_2$; γ und λ sind die nach g_2 und l_2 projicirenden Ebenen. Die Strecke auf p zwischen den beiden Fusspunkten projicirt sich in der neuen Projectionsebene in wahrer Grösse als eines der Lothe zwischen den Parallelen g_2 und l_2.

Schneiden sich g und l, so fallen g_2 und l_2 zusammen: das gemeinsame Loth p steht auf ihrer Ebene im Schnittpunkte senkrecht und die Fusspunkte haben sich in diesem vereinigt.

33. *Wenn eine ebene Figur oder ein ganzes ebenes Feld in zwei verschiedenen Weisen durch Parallelstrahlen auf die nämliche Ebene* Π *projicirt wird, so sind die beiden Projectionen affin* (Fig. 13). In der That, die beiden Projectionen g_1 und g' einer Gerade g des Feldes schneiden sich in der Spur der Gerade, also immer auf der Spur der Ebene E, in der das Feld liegt; ferner alle die Ebenen, welche die beiden Projectionsstrahlen PP_1, PP' eines Punktes P verbinden, sind parallel, weil sie die Richtungen der einen und andern Projectionsstrahlen enthalten; folglich sind auch die Spuren dieser Ebenen parallel; das sind aber die Verbindungslinien je der beiden Projectionen P_1, P'; diese Geraden sind übrigens auch die Projectionen der einen Projectionsstrahlen in der Richtung der andern. Und endlich, wenn P_1 auf g_1 liegt, dann liegt (Nr. 6) P auf g und daher wiederum P' auf g'; und ebenso umgekehrt. Damit sind die Eigenschaften der Affinität bewiesen; Axe der Affinität ist die Spur der Ebene; Affinitätsstrahlen sind jene Geraden $P_1 P'$.

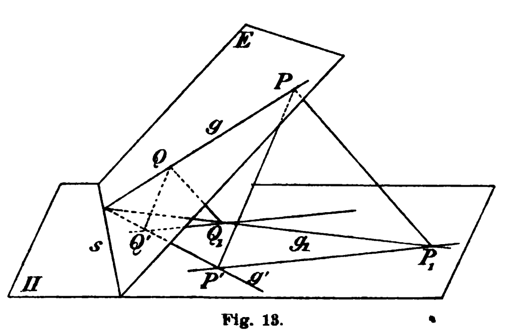


Fig. 13.

Der Schatten, den eine Figur auf eine Ebene wirft bei parallelen Lichtstrahlen, ist nichts anderes als Parallelprojection. *Daher sind die*

Parallelprojection einer ebenen Figur und der Schatten, den sie bei parallelen Lichtstrahlen auf die Projectionsebene wirft, affin; Affinitätsaxe ist die Spur der Ebene, Affinitätsstrahlen sind die Projectionen der Lichtstrahlen oder die Schatten der Projectionsstrahlen.

An die Stelle der Affinität tritt Homologie, wenn mindestens eine der beiden Projectionen central ist; die Verbindungsebenen zusammengehöriger Projectionsstrahlen gehen durch die Gerade, welche das Centrum der einen Projection in der Richtung der andern projicirt oder beide Centren verbindet, und die Verbindungslinien der beiden Projectionen eines Punktes (Homologiestrahlen) laufen in den Schnittpunkt dieser Gerade mit Π zusammen.

34. Es scheint an dieser Stelle geeignet, die sogenannte *perspective Ansicht vom Parallelismus* einzuführen. Wenn in einer Ebene um einen festen Punkt eine Gerade sich bewegt, also einen Strahlenbüschel beschreibt, so hat jeder Strahl desselben mit einer festen Gerade der Ebene einen Punkt gemein, mit Ausnahme eines einzigen Strahls, nämlich des zur festen Gerade parallelen. Dieser hat mit der festen Gerade statt eines Punktes die Richtung gemein. Bei der Centralprojection oder Perspective ist erkannt worden, dass eine gemeinsame Richtung von Geraden im allgemeinen in einen Punkt übergeht und dass bisweilen Punkte in Richtungen übergehen. Man hat deshalb an Stelle von Richtung das Wort Punkt gesetzt und hat sich überzeugt, dass dies in allen Sätzen, bei denen man es nur mit Lagen-, nicht mit Masseigenschaften zu thun hat, unbedenklich geschehen kann; dies führt zu zahlreichen Vereinfachungen, weil Sätze, welche sonst selbständig neben einander aufgeführt werden müssen, sich unter einander subsumiren und viele Doppelsätze in einfache sich verwandeln.

Indem der gemeinsame Punkt des beweglichen Strahls des obigen Büschels mit der festen Gerade, je mehr der Strahl sich der Parallellage nähert, sich immer weiter nach der einen Seite entfernt und nachdem er bei der Parallellage und nur bei derselben verloren gegangen, auf der andern Seite wieder erscheint und zurückkommt, kann man diesen „uneigentlichen“ gemeinsamen Punkt, den man zwei parallelen Geraden anstatt der gemeinsamen Richtung zuschreibt, nur in unendliche Entfernung versetzen, und zwar ebensogut auf der einen Seite der Gerade als auf der andern. Wie eine Gerade nur eine Richtung, so kann sie also auch nur einen unendlich fernen Punkt haben. Es giebt dann in einer Ebene so viele unendlich ferne Punkte als sie Richtungen enthält, folglich als es Strahlen in einem Strahlenbüschel giebt, mithin ∞^1, so viele, wie eine gerade Linie Punkte enthält.

Man ersieht, dass nach dieser Ansicht die Doppelsätze: „Zwei

Geraden in derselben Ebene haben einen Punkt oder die Richtung gemein" und „Zwei Geraden mit gemeinsamem Punkt oder gemeinsamer Richtung bestimmen eine Ebene" in die einfachen Sätze übergehen: „Zwei Geraden derselben Ebene haben einen Punkt gemein" und „Zwei Geraden mit gemeinsamem Punkt bestimmen eine Ebene."

35. Zwei Ebenen haben entweder eine Gerade oder die „Stellung" gemein, d. h. sie sind parallel; in Bezug auf Gerade und Stellung gilt nun ähnliches wie für Punkt und Richtung; man hat daher Stellung ersetzt durch „unendlich ferne Gerade" und schreibt also jeder Ebene eine (einzige) unendlich ferne Gerade zu, den Inbegriff aller ihrer unendlich fernen Punkte. Der obige Doppelsatz verwandelt sich dann in den einfachen: Zwei Ebenen haben jederzeit eine Gerade gemein.

Parallele Ebenen haben also ihre unendlich ferne Gerade gemein.

Jede Gerade hat mit einer Ebene, in der sie nicht liegt, einen Punkt gemein, oder sie ist ihr parallel, d. h. sie ist einem System von Parallelen in der Ebene parallel, ihre Richtung ist in der Ebene enthalten; sie hat also mit jenen parallelen Geraden die Richtung, mithin den unendlich fernen Punkt gemein, also hat sie ihn auch mit der Ebene, in der diese Geraden liegen, gemein.

Folglich geht der Doppelsatz wieder in den einfachen über: Jede Gerade hat mit einer Ebene, welcher sie nicht angehört, einen Punkt gemein.

Zu jeder Gerade einer Ebene kann man in jeder zu der Ebene parallelen Ebene Parallelen ziehen; also jede Richtung einer Ebene ist auch in jeder zu derselben parallelen Ebene enthalten; oder ihre unendlich fernen Punkte hat eine Ebene mit allen ihr parallelen gemein; diese Punkte liegen auf der gemeinsamen unendlich fernen Gerade; was eben nichts anderes heisst als: jede Ebene, die dieselbe Stellung hat, wie die betrachtete Ebene, besitzt auch alle ihre Richtungen. Wenn man infolge dessen sagt: Eine Gerade, welche einer Ebene parallel ist, trifft deren unendlich ferne Gerade (weil sie mit einem System paralleler Geraden in der Ebene parallel ist), so ist dies, da sie ja in einer zu der Ebene parallelen Ebene liegt, nun blos ein specieller Fall des Satzes: Eine Gerade, die in der einen von zwei Ebenen liegt, trifft die andere auf der Schnittlinie.

Unendlich ferne Punkte und Geraden giebt es also im Raume so viele, als es Richtungen und Stellungen giebt, also so viele als durch einen Punkt Geraden und Ebenen gehen, je ∞^2; mithin so viele als Punkte und Geraden in einer Ebene liegen. Dies stimmt wieder mit der Ansicht, nach der alle unendlich fernen Punkte und Geraden des Raumes in einer Ebene gedacht werden, „der unendlich fernen

Ebene des Raumes“, auf die hier jedoch nicht weiter eingegangen werden soll.

Alle ∞^1 Geraden einer Ebene von gegebener Richtung bilden einen Strahlenbüschel, alle ∞^2 Geraden des Raumes von gegebener Richtung einen Strahlenbündel mit unendlich fernem Scheitel. Alle ∞^1 Ebenen von gegebener Stellung bilden einen Ebenenbüschel mit unendlich ferner Axe.

36. Eine Gerade parallel zu einer andern führen heisst jetzt: sie durch deren unendlich fernen Punkt ziehen; eine Ebene parallel zu einer Gerade oder Ebene construiren heisst: sie durch den unendlich fernen Punkt der Gerade, bez. die unendlich ferne Gerade der Ebene legen.

Der Satz: „Durch einen Punkt ist zu einer Gerade eine und nur eine Parallele möglich“ subsumirt sich unter den Satz: „Durch zwei Punkte ist eine und nur eine Gerade möglich.“

Die Sätze:

Durch einen Punkt lässt sich zu zwei (nicht parallelen) Geraden,

durch eine Gerade lässt sich zu einer andern Gerade, und

durch einen Punkt lässt sich zu einer Ebene jederzeit eine und nur eine parallele Ebene legen

sind nun specielle Fälle der beiden Sätze:

Durch drei nicht in gerader Linie befindliche Punkte und

durch eine Gerade und einen ihr nicht angehörenden Punkt lässst sich jederzeit eine und nur eine Ebene legen.

Die Sätze: Eine Parallele zu einer Ebene, die mit ihr einen Punkt gemein hat, liegt ganz in ihr, und:

Eine Parallele zu einer Ebene liegt ganz in der Ebene, die durch einen Punkt auf ihr parallel zur Ebene geführt ist,

sind besondere Fälle des Satzes: Eine Gerade, die mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, liegt ganz in ihr.

Der Satz: Wenn durch eine Parallele zu einer Ebene eine andere Ebene gelegt wird, so ist die Schnittlinie beider Ebenen zu ihr parallel,

ist ein specieller Fall des Satzes: Wenn durch eine Gerade, die eine Ebene schneidet, eine andere Ebene geht, so geht die Schnittlinie beider Ebenen durch den Schnittpunkt der Gerade und der ersteren Ebene.

Die Sätze: Werden durch zwei parallele Geraden Ebenen gelegt, so ist ihre Schnittlinie den beiden parallelen Geraden parallel, und: Wenn eine Gerade in einer Ebene mit einer in einer andern Ebene parallel ist, so sind sie beide der Schnittlinie der Ebenen parallel, sind

in folgendem enthalten: Gehen durch zwei sich schneidende Geraden Ebenen, so geht ihre Schnittlinie durch den Schnittpunkt derselben; oder: Ein Punkt, der auf zwei Ebenen liegt, gehört ihrer Schnittlinie an; oder: Wenn eine Gerade in einer Ebene eine Gerade in einer andern Ebene trifft, so kann es nur auf der Schnittlinie geschehen.

In dem Doppelsatze:

Die drei Schnittlinien von drei Ebenen laufen in einen Punkt zusammen oder sind parallel,

ist der zweite Theil nun überflüssig, weil im ersten enthalten.

Der Satz: Wenn zwei Ebenen zwei Richtungen gemein haben (oder, wie gewöhnlich gesagt wird, wenn die Schenkel eines Winkels in der einen Ebene mit denen eines Winkels in der andern parallel sind), so sind die beiden Ebenen parallel und haben alle Richtungen gemein,

subsumirt sich unter den Satz:

Haben zwei Ebenen zwei Punkte gemein, so haben sie deren ganze Verbindungslinie gemein.

37. Aber auch Maasseigenschaften, wie die Rechtwinkligkeit, können der perspectiven Ansicht angepasst werden.

Alle Senkrechten auf einer Ebene α sind parallel, also haben sie denselben unendlich fernen Punkt A_∞, durch den aber auch die zu der Ebene α senkrechten Ebenen gehen, da sie den senkrechten Geraden parallel sind.

Weil zwei Punkte eine Gerade, ein Punkt und eine Gerade eine Ebene bestimmen, so geht also durch jeden Punkt eine und nur eine senkrechte Gerade, durch eine Gerade eine und nur eine senkrechte Ebene zu einer gegebenen Ebene.

Zwei zu α senkrechte Ebenen haben eine zu α senkrechte Schnittlinie; denn beide gehen durch A_∞, also thut es auch die Schnittlinie.

Steht β senkrecht auf α, so muss jede zu α senkrechte Gerade, die durch einen eigentlichen Punkt von β geht, ganz in β liegen, weil sie mit ihr dann zwei Punkte gemein hat.

Alle Ebenen, die auf derselben Gerade a senkrecht stehen, haben, weil sie parallel sind, dieselbe unendlich ferne Gerade. Folglich geht durch jeden Punkt eine und nur eine zu der Gerade senkrechte Ebene.

38. Die Parallelprojection wird nach der perspectiven Ansicht ein specieller Fall der Centralprojection, d. h. alle Sätze der letzteren, die nicht gerade ein endliches Centrum voraussetzen, gelten auch für die Parallelprojection.

Ferner ist nun, wenn die Punkte und Geraden einer Ebene aus einem endlichen Centrum auf eine andere Ebene projicirt werden,

durchweg richtig, dass jeder Punkt, jede Gerade sich wieder in einen Punkt, eine Gerade projicirt, es haben nun *ausnahmslos* alle Punkte und alle Geraden bei der Centralprojection Projectionen; sind die Projectionsstrahlen, bez. projicirenden Ebenen zur Projectionsebene parallel, so sind die Projectionen uneigentlich, unendlich fern.

Bei der Parallelprojection hat jeder endliche Punkt einen endlichen und jeder unendlich ferne einen unendlich fernen zur Projection, d. h. jede Richtung eine Richtung (Nr. 7).

Jede Gerade g hat nach dieser Auffassung eine Spur in der Projectionsebene Π; ist sie zu Π parallel, so ist der gemeinsame unendlich ferne Punkt von g und g_1 die Spur. Die Spurparallelen einer Ebene haben also ihre Spurpunkte alle im unendlich fernen Punkte der Spur der Ebene (Nr. 13), und in dem Doppelsatze von Nr. 21: Die Umlegung g_0 einer Gerade g von E und ihre Projection g_1 treffen sich auf der Spur s von E oder sind beide ihr parallel, kann der zweite Theil wegfallen.

Jede Ebene hat nun eine Spur in Π; ist sie zu Π parallel, so ist dieselbe die unendlich ferne Gerade von Π.

Die (homologische) Affinität ergiebt sich als Speciallfall der Homologie (vergl. Nr. 33); das Centrum ist unendlich fern geworden.

39. Entfernt sich der Schnittpunkt einer um einen festen Punkt beweglichen Gerade mit einer festen Gerade immer mehr, wie in Nr. 34, so wird ihr Winkel immer kleiner und wird null, wenn der Parallelismus eintritt (vergl. Nr. 11).

Ebenso wird der Winkel einer um einen festen Punkt beweglichen Gerade gegen eine Ebene immer kleiner, je weiter sich der Schnittpunkt entfernt, und null, wenn die Gerade mit der Ebene parallel wird.

Soll eine um eine feste Gerade a bewegliche Ebene mit einer festen Ebene α parallel werden können, so muss a zu α parallel sein (Nr. 16); dann bleibt die Schnittlinie mit α zu sich (und zu a) parallel, und je weiter sie sich entfernt, desto kleiner wird der Neigungswinkel der beiden Ebenen; wenn der Parallelismus erreicht, die gemeinsame Gerade ins Unendliche gelangt, also an ihre Stelle die gemeinsame Stellung getreten ist, wird er null (vergl. Nr. 26).

Zweiter Abschnitt.

Darstellung auf zwei Projectionsebenen.

40. Wir haben (Nr. 10, 12) gesehen, dass ein Punkt, eine Gerade durch ihre Projection auf einer (einzigen) Projectionsebene noch nicht bestimmt ist. Ebenso genügt die Spur in einer Projectionsebene nicht zur Bestimmung einer Ebene; würde noch der Neigungswinkel gegen die Projectionsebene hinzugefügt, so würde dadurch zwar die Ebene (freilich immer noch zweideutig) bestimmt, aber diese Bestimmung durch Spur und Neigungswinkel graphisch wenig bequem sein.

Man führt deshalb noch *eine zweite Projectionsebene* ein. *Dieselbe stellt man gewöhnlich auf die erste senkrecht*, und zwar wird die erste im allgemeinen horizontal, die andere also vertical vorgestellt und danach auch genannt und entsprechend die auf ihnen befindlichen Projectionen; die horizontale Projectionsebene heisst wohl auch Grundrissebene, die verticale Aufrissebene, und daher die Projectionen Grundrissprojection, Aufrissprojection oder kurz Grundriss, Aufriss.*)

Wir behalten aber der Kürze und der grösseren Allgemeinheit halber, da die Horizontal- und Verticalstellung nicht nothwendig ist, die Namen erste und zweite Projectionsebene bei, bezeichnen sie mit Π_1, Π_2, und die auf ihnen gelegenen Projectionen ebenfalls mit den (unteren) Zeigern (Indices) 1, 2; Π_1 ist dabei die gewöhnlich horizontal vorgestellte.

Es giebt ∞^1 horizontale Ebenen; sie bilden einen Parallelebenenbüschel. Jede enthält ∞^2 Geraden, die sämmtlich horizontal sind; daher giebt es ∞^3 horizontale Geraden, in jeder nicht horizontalen Ebene giebt es ∞^1.

Die verticalen Strahlen und verticalen Ebenen gehen alle durch den unendlich fernen Punkt in senkrechter Richtung zu den horizontalen Ebenen (Nr. 37) und bilden einen Strahlenbündel und Ebenenbündel mit diesem uneigentlichen Punkte als Scheitel; es giebt ∞^2 verticale Geraden und ebenso viele verticale Ebenen. In jeder Ebene eines Bündels liegen ∞^1 Strahlen desselben, und durch jeden Strahl des Bündels gehen ∞^1 von seinen Ebenen. Dies gilt also auch für den Bündel der verticalen Strahlen und Ebenen. Zwei verticale Ebenen schneiden sich in einer verticalen Gerade, zwei verticale Geraden sind durch eine verticale Ebene verbunden.

---

*) Bisweilen werden freilich die Spuren von Ebenen Risse genannt, was sich jedoch nicht empfiehlt.

In einer beliebigen Ebene befindet sich keine verticale Gerade, durch jede Gerade aber geht eine verticale Ebene.

41. Die Schnittlinie der beiden Projectionsebenen Π_1, Π_2 heisst *Projectionsaxe* (Grundlinie); sie soll mit a bezeichnet werden. Sie theilt jede der beiden Π in zwei Hälften, eine positive und eine negative, bezeichnet mit Π_1+, Π_1-; bez. Π_2+, Π_2-; sind die beiden Π bez. horizontal und vertical, so wird der für den Beschauer vordere Theil von Π_1 und der obere von Π_2 als positive Hälfte angenommen. Der Raum wird durch die beiden Π in vier Theile getheilt, welche der erste, zweite, dritte, vierte Raum heissen, je nachdem sie von Π_1+, Π_2+; Π_1-, Π_2+; Π_1-, Π_2-; Π_1+, Π_2- eingeschlossen werden.

Um nun alles auf einem Blatte zeichnen zu können, wird die eine Projectionsebene um die Projectionsaxe umgelegt, bis sie mit der anderen zusammenfällt, und zwar geschieht das Umlegen stets so, dass Halbebenen mit entgegengesetzten Zeichen, also Π_1+ *und* Π_2-, Π_1- *und* Π_2+ *auf einander zu liegen kommen und, indem die Axe horizontal gezogen wird, jene unterhalb, diese oberhalb derselben.* Im Geiste sind die Ebenen und die auf ihnen befindlichen Projectionen stets wieder in die richtige Lage zurückzubringen.

In Bezug auf das Resultat ist es gleichgültig, welche der beiden Ebenen in die andere umgelegt wird; wir wollen daher den unbestimmten Ausdruck: „vereinigte Projectionsebenen“ gebrauchen, man könnte auch beide drehen und einander entgegen bringen. Bei Zeichnungen auf dem Reissbrette wird man die verticale Ebene in die horizontale umlegen, bei solchen auf der Wandtafel diese in jene.

Bei vielen Constructionen kommt es nur auf die Richtung der Axe an, nicht auf ihre Lage.

a) Darstellung des Punktes.

42. *Die Fusspunkte* P_1, P_2 (Fig. 14*)) *der aus einem Punkte* P *im Raume auf* Π_1, Π_2 *gefällten Lothe* p_1, p_2 *sind also seine beiden Projectionen:* diese Lothe PP_1, PP_2 selbst messen den Abstand von P von Π_1, Π_2 und heissen *sein erster, bez. zweiter Abstand.* Da die beiden Lothe einen Punkt (P) gemein haben, so erzeugen sie eine Ebene, welche, weil sie durch die zu Π_1, Π_2 normalen Geraden PP_1, PP_2 geht, auch auf diesen Ebenen selbst senkrecht steht, mithin auch auf deren Schnittlinie, der Axe a. Treffe sie dieselbe in P_a, so sind

*) In Fig. 14a liegt P im ersten, Q im zweiten Raume. In Fig. 14b sind die Projectionsebenen vereinigt.



ihre Schnittlinien mit Π_1, Π_2 bez. P_1P_a, P_2P_a und diese, sowie auch PP_a stehen auf a senkrecht. P_a ist demnach die Projection des Punktes P auf die Projectionsaxe a, seine Axenprojection. Ferner zeigt sich, dass *die von den Projectionen P_1, P_2 eines Punktes P auf die Projectionsaxe gefällten Lothe diese in demselben Punkte treffen, der Axenprojection von P.* Die beiden Lothe P_1P_a, P_2P_a nennt man *die*

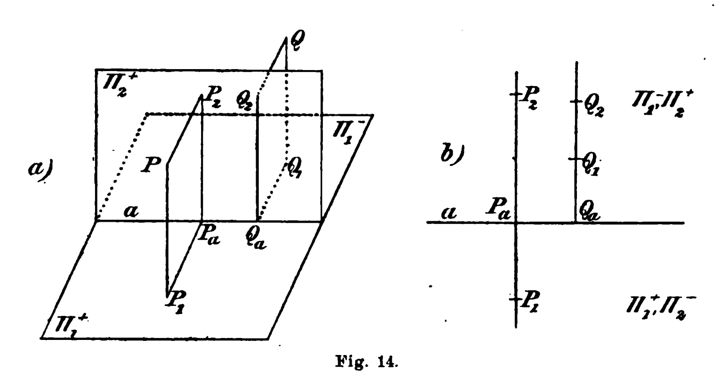


Fig. 14.

erste, zweite Ordinate des Punktes P. Eine Ordinate ist positiv oder negativ, je nachdem sie in der positiven oder negativen Halbebene der betreffenden Π liegt.

Sind die beiden Π vereinigt, so liegen diese beiden Lothe in *einer* Linie. *Die beiden Projectionen P_1, P_2 eines Punktes in vereinigten Projectionsebenen liegen stets auf einer zur Projectionsaxe senkrechten Gerade* (Ordinatenlinie).

Dabei fallen die beiden Ordinaten P_1P_a und P_2P_a auf entgegengesetzte Seiten oder dieselbe Seite von a, je nachdem sie gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben, also der Punkt im ersten oder dritten, oder im zweiten oder vierten Raume liegt. Die positiven ersten Ordinaten liegen stets unterhalb a, die positiven zweiten oberhalb. Wie liegen also die Projectionen eines Punktes je nach dem Raume, dem er angehört?

Zwei Punkte, bez. in Π_1, Π_2 gelegen, deren Verbindungslinie — bei vereinigten Projectionsebenen — nicht senkrecht zur Projectionsaxe ist, oder — bei nicht vereinigten Projectionsebenen — deren Ordinaten nicht denselben Fusspunkt haben, können demnach nicht Projectionen eines und desselben Punktes im Raume sein.

Kennt man die eine Projection eines Punktes, so ist das (beiderseitig unendlich lange) Loth aus ihr auf die Axe der Ort für die andere Projection; besitzt man noch eine zweite (gerade oder krumme) Ortslinie für dieselbe, so bringt man das Loth mit ihr zum Schnitt

und nennt dieses Verfahren „die bekannte Projection auf diese Linie lothen“.

Diese Eigenschaft der beiden Projectionen eines Punktes hat auch statt, wenn die Projectionsebenen nicht einen rechten Winkel mit einander bilden, wofern nur auf beide orthogonal projicirt wird; denn die Ebene der beiden Projectionsstrahlen eines Punktes ist auch dann senkrecht zu den beiden Π und zu a.

43. *Umgekehrt, wenn P_1 und P_2 so liegen, dass $P_1 P_2$ senkrecht a (in P_a) ist, d. h. bei nicht vereinigten Projectionsebenen, dass die aus ihnen auf a gefällten Lothe denselben Fusspunkt P_a haben, so giebt es immer einen und nur einen Punkt P im Raume, dessen Projectionen P_1 und P_2 sind.* Denn weil $P_1 P_a$ und $P_2 P_a$ sich schneiden, so erzeugen sie eine Ebene, welche, da $P_1 P_a$ und $P_2 P_a$ auf a normal sind, ebenfalls auf a senkrecht steht und mithin auch auf den durch a gehenden Ebenen Π_1, Π_2. Alle Punkte nun, welche P_1 zur ersten Projection haben, befinden sich auf dem in P_1 auf Π_1 errichteten Lothe p_1, alle, welche P_2 zur zweiten Projection haben, auf dem in P_2 auf Π_2 errichteten Lothe p_2. Jenes so wie dieses liegt in der obigen Ebene, da dieselbe auf Π_1, bez. Π_2 senkrecht steht und das Loth auf Π_1, bez. Π_2 in einem Punkte ihrer Schnittlinie mit der Ebene errichtet ist. Da also beide Lothe in derselben Ebene liegen, so haben sie einen Punkt gemein und zwar, weil sie als Lothe auf nicht parallelen Ebenen nicht parallel sein können, jederzeit einen endlichen; mithin giebt es in der That stets einen und nur einen Punkt, welcher P_1 und P_2 zu seinen Projectionen hat, wenn sie die genannte Lage besitzen.

Jeder Punkt ist demnach durch seine beiden Projectionen vollständig bestimmt, d. h. theilt dieselben mit keinem andern Punkte.

44. Die Ordinate $P_2 P_a$ ist dem Abstande PP_1 parallel; denn weil Π_2 normal Π_1 und $P_2 P_a$ in Π_2 senkrecht a ist, so ist sie auch senkrecht Π_2; ebenso ist $P_1 P_a \parallel PP_2$; demnach ist die Figur $PP_1 P_a P_2$ ein Rechteck, folglich auch $P_2 P_a = PP_1$ und $P_1 P_a = PP_2$.

Also ist die zweite (erste)) Ordinate eines Punktes gleich dem ersten (zweiten) Abstande desselben.* Man kann folglich aus der zweiten (ersten) Projectionsebene an einer auf dem Zeichenblatte befindlichen Strecke den Abstand eines Punktes von der ersten (zweiten) Projectionsebene abgreifen. (Vgl. Nr. 21, 28.) Es ist demnach von Nutzen, beim „Lothen“ den Schnittpunkt der Ordinatenlinie mit der Projectionsaxe stets zu markiren.

Dies, in Verbindung mit dem in Nr. 28, 29 Gesagten genügt, um

---

*) Dieser Zusatz in Parenthese wird künftig im allgemeinen unterbleiben.



den Neigungswinkel β *einer Gerade, von der zwei Punkte* P, Q *oder* R, S *durch ihre Projectionen in* Π_1 *und* Π_2 *gegeben sind, gegen* Π_1 (*oder* Π_2) *und die wahre Länge der Strecke zwischen diesen Punkten* durch Umlegung der projicirenden Ebene in Π_1 (oder Π_2), bez. in eine Parallelebene zu Π_1 (oder Π_2) *zu ermitteln.* In Figur 15a sind $P_1P_0 = P_aP_2$ und $Q_1Q_0 = Q_aQ_2$ senkrecht zu P_1Q_1 errichtet und zwar nach verschiedenen Seiten, weil die beiden Ordinaten P_aP_2, Q_aQ_2 verschiedene Vorzeichen haben; P_0Q_0 ist die wahre Länge von PQ und $\beta = (P_0Q_0, P_1Q_1)$ der Neigungswinkel (PQ, Π_1). In Fig. 15b ist h' die durch S gezogene Parallele zur Spur der Ebene, welche RS auf Π_1 projicirt, in Π_1, daher TR_2 die algebraische Differenz der zweiten Ordinaten oder ersten Abstände der Punkte R, S; $R_1R_0 = TR_2$ ist senkrecht zu R_1S_1 errichtet; dann ist S_1R_0 die wahre Länge von SR und $R_1S_1R_0$ der Winkel (RS, Π_1).

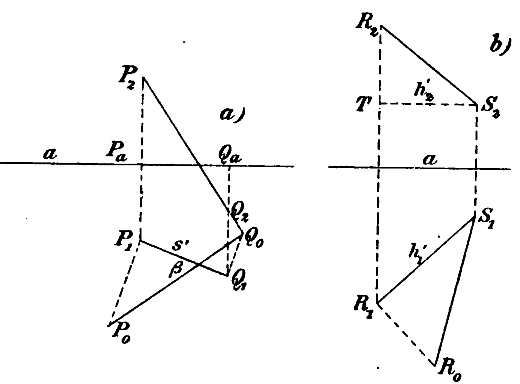


Fig. 15.

Liegt ein Punkt in einer der beiden Projectionsebenen, so fällt er mit der betreffenden Projection zusammen; seine andere Projection befindet sich auf der Projectionsaxe. Gehört er der Projectionsaxe selbst an, so fällt er mit seinen beiden Projectionen zusammen.

b) Darstellung der Gerade.

45. *Die beiden Projectionen* g_1 *und* g_2 *einer Gerade* g *sind die Schnittlinien der durch* g *senkrecht zu* Π_1, Π_2 *gelegten (projicirenden) Ebenen* γ_1, γ_2 *mit* Π_1, *bez.* Π_2.

Liegt ein Punkt P auf g, so muss sowohl P_1 auf g_1, als P_2 auf g_2 liegen (Nr. 7).

Umgekehrt, wenn die Projectionen P_1 *und* P_2 *eines Punktes* P *bez. auf den Projectionen* g_1 *und* g_2 *einer Gerade* g *liegen, so liegt* P *auf* g. Denn g ist die Schnittlinie der in g_1 und g_2 senkrecht auf Π_1, bez. Π_2 errichteten Ebenen γ_1, γ_2, P der Schnittpunkt der in P_1 und P_2 auf Π_1, Π_2 errichteten Lothe p_1, p_2. Da P_1 auf g_1 liegt, so muss p_1 in γ_1 liegen; ebenso p_2 in γ_2. Folglich kann der Schnittpunkt P von p_1 und p_2 nur auf der Schnittlinie g von γ_1 und γ_2 sich befinden.

Es ist also leicht, *einen Punkt auf eine Gerade*, die durch ihre Projectionen gegeben ist, *zu legen* (Fig. 16a), d. h. seine Projectionen anzugeben, oder wenn die eine Projection eines Punktes P von g gegegeben, die andere aufzufinden (Nr. 42).

Ist aber z. B. g_2 normal oder nahezu normal zur Axe, so ist das Lothen unmöglich, bez. ungenau; kennt man noch die Projectionen zweier Punkte A und B von g, und will die zweite Projection P_2 des auf g gelegenen Punktes P, von dem P_1 bekannt ist, haben, so benutzt man den Umstand, dass

$$\frac{A_2 P_2}{B_2 P_2} = \frac{A_1 P_1}{B_1 P_1}, \text{ weil beide gleich } \frac{AP}{BP} \text{ sind (Nr. 7).}$$

Hieran kann man die Aufgabe anschliessen: *Auf eine gegebene Gerade g von einem Punkt P derselben eine gegebene Strecke aufzutragen.* Es sei Q ein zweiter Punkt der Gerade; dann construire man nach Nr. 44 die wahre Länge $P_0 Q_0$, trage darauf von P_0 (nach der vorgeschriebenen Seite) die gegebene Strecke als $P_0 R_0$ ab; R_1 liegt dann so auf g_1, dass $R_1 R_0$ zu g_1 senkrecht ist, und R_2 ergiebt sich durch Lothen auf g_2. Es sind $P_1 R_1$, $P_2 R_2$ die Projectionen der verlangten Strecke.

46. Die beiden Spuren einer Gerade heissen *ihre erste und zweite Spur* und sollen mit S', S'' bezeichnet werden. In S', bez. S'' be-

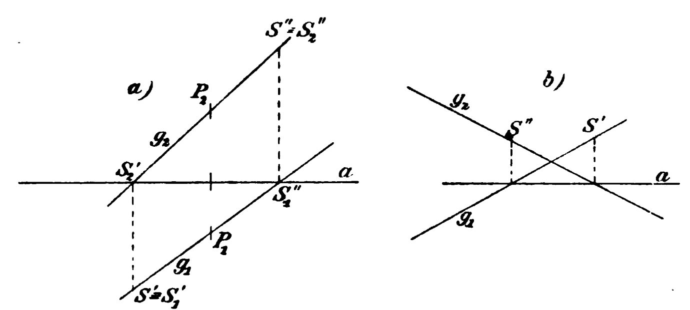


Fig. 16.

gegnet sich g mit ihrer ersten Projection g_1, bez. mit ihrer zweiten g_2. S', weil in Π_1 gelegen, fällt mit seiner ersten Projection zusammen, die zweite liegt also auf der Axe. Um mithin *die erste Spur einer durch ihre beiden Projectionen g_1, g_2 gegebenen Gerade g zu finden,* ermittele man (Fig. 16a und b) den Punkt $g_2 a = S_2'$ und lothe ihn auf g_1, d. h. errichte in ihm auf a das Loth bis zum Schnitt mit g_1; dieser Schnitt ist der gesuchte Punkt S'. Entsprechend wird S'' gefunden.

Eine Gerade g, welche keiner der beiden Π parallel ist, hat zwei eigentliche Spuren; sie wird durch dieselben in ein endliches Stück und zwei unendlich lange getheilt, die in drei von den vier Räumen sich befinden; in den vierten gelangt sie nicht. Das endliche Stück liegt in dem Raume, welchen die die Spuren enthaltenden Projections-Halbebenen begrenzen. Eine Gerade, deren endliches Stück im ersten (zweiten) Raume liegt, kann durch Parallelverschiebung, wobei sie in dem Moment, wo sie der Axe begegnet, nur in zwei Scheitelräumen liegt, in den dritten (vierten) Raum gebracht werden.

Trifft eine Gerade die Projectionsaxe, so begegnet sie sich dort mit ihren beiden Projectionen; beide Spuren haben sich vereinigt.

47. *Wenn eine Gerade g der einen Projectionsebene Π_1 parallel ist* (ohne zur anderen normal zu sein), *so ist die ungleichnamige Projection g_2 der Axe parallel;* denn in der zweiten projicirenden Ebene γ_2 von g giebt es zwei Richtungen, die mit Π_1 parallel sind, nämlich die von g nach Vor. und die der zweiten Projectionsstrahlen der Punkte von g, also ist $\gamma_2 \parallel \Pi_1$; folglich sind ihre Schnittlinien mit Π_2, d. i. g_2 und a, auch parallel. Umgekehrt, wenn $g_2 \parallel a$ ist, so hat γ_2, die in g_2 auf Π_2 senkrechte Ebene, mit Π_1 zwei Richtungen gemeinsam, die von g_2 und a und die Richtung der zweiten Projectionsstrahlen; daher ist γ_2 zu Π_1 parallel, demnach auch die in ihr liegende g.

Man suche die Spur S' von g; weil $g_2 \parallel a$ ist, so ist der Punkt $g_2 a$ unendlich fern, also auch das in ihm auf a errichtete Loth und dessen Schnittpunkt S' mit g_1. Man kann ebenso umgekehrt aus der unendlichen Entfernung von S' auf die von $g_2 a$, also auf den Parallelismus von g_2 mit a schliessen.

Jede Gerade, die zu einer der beiden Projectionsebenen parallel ist, wird durch ihre endliche Spur (in der andern) in zwei Theile getheilt und befindet sich also nur in zwei Räumen.

Der Neigungswinkel (g, g_2) einer mit Π_1 parallelen Gerade g gegen die andere Projectionsebene Π_2 stellt sich in seiner ersten Projection (g_1, a) in wahrer Gestalt dar, weil seine Schenkel g und g_2 beide zu Π_1 parallel sind; die erste Projection von g_2 ist a.

Ist eine Gerade g beiden Projectionsebenen und infolge dessen der Axe parallel, so sind auch beide Projectionen zu dieser parallel; und umgekehrt.

Beide Spuren sind unendlich fern: sie haben sich im unendlich fernen Punkt der Axe vereinigt, indem der jetzige Fall nach der perspectiven Ansicht sich dem am Ende von Nr. 46 erwähnten unterordnet.

Eine solche Gerade befindet sich nur in einem der vier Räume.

Liegt eine Gerade in einer der beiden Projectionsebenen (ohne zur andern normal zu sein), so fällt sie mit der zugehörigen Projection, die andere mit der Axe zusammen; die Axe selbst ist mit ihren beiden Projectionen identisch.

48. *Steht eine Gerade g auf der einen der beiden Projectionsebenen Π_1 senkrecht, so ist ihre Projection g_1 ein Punkt. Die andere Projection g_2 steht senkrecht auf der Axe;* denn die zweite projicirende Ebene γ_2 steht als solche senkrecht auf Π_2, weil sie aber durch g geht, auch senkrecht auf Π_1, mithin auch auf der Axe, folglich steht diese auf der Schnittlinie $\gamma_2\Pi_2 = g_2$ normal.

Da alle Punkte von g ihre erste Projection in g_1 haben, so muss — bei vereinigten Projectionsebenen — die durch den Punkt g_1 gehende Ordinatenlinie durch alle Punkte von g_2 gehen, also mit ihr zusammenfallen; d. h. g_2 *muss durch den Punkt* g_1 *gehen.*

Diese Eigenschaften bleiben bestehen, wenn der rechte Winkel zwischen Π_1 und Π_2 aufgegeben wird.

49. Ist eine Gerade zur Axe a normal (ohne sie gerade zu schneiden), so geht durch sie eine zu a normale Ebene (Nr. 19), welche dann auch zu beiden Π senkrecht ist, in der sich also beide projicirenden Ebenen vereinigen. In dem Punkte, in welchem diese Ebene auf a senkrecht steht, sind dann auch ihre Schnitte mit Π_1, Π_2, die Projectionen, auf a normal.

Die Projectionen einer zur Axe a rechtwinkligen Gerade stehen in demselben Punkte auf a normal und fallen daher zusammen, wenn die Projectionsebenen sich vereinigen.

50. Legen wir uns jetzt die umgekehrte Form vor: Sind zwei Geraden g_1 in Π_1, g_2 in Π_2 stets Projectionen einer Gerade im Raume?

Die Geraden, welche sich in g_1 auf Π_1 projiciren, liegen in der Ebene γ_1, die in g_1 auf Π_1 normal ist, ebenso die in g_2 auf Π_2 sich projicirenden in der in g_2 auf Π_2 normalen Ebene γ_2 (Nr. 12). Diese beiden Ebenen γ_1 und γ_2 haben im allgemeinen eine und nur eine und zwar gewöhnlich endliche Gerade gemein.

Also *jede beliebige Gerade g_1 in Π_1 und jede beliebige Gerade g_2 in Π_2 sind im allgemeinen Projectionen einer (und nur einer) Gerade g im Raume;* während zwei Punkte P_1 (in Π_1), P_2 (in Π_2), wenn sie Projectionen desselben Punktes im Raume sein sollen, an eine Bedingung gebunden sind (Nr. 42, 43).

Eine Gerade ist im allgemeinen durch ihre beiden Projectionen bestimmt, d. h. theilt sie beide mit keiner andern Gerade.

51. *Es giebt aber hier Ausnahmefälle,* welche davon herrühren, dass γ_1 und γ_2 parallel oder identisch sind, oder dass die Schnittlinie

$\gamma_1\gamma_2$ senkrecht zu der einen Π wird. Sind γ_1 und γ_2 parallel (oder identisch), so stehen beide auf Π_1 und Π_2 senkrecht, also auf der Axe; mithin stehen auch ihre Schnittlinien g_1, g_2 mit Π_1, bez. Π_2 auf a normal. Sind γ_1 und γ_2 blos parallel, so stehen g_1 und g_2 in verschiedenen Punkten senkrecht; also:

Zu zwei Geraden g_1, g_2, welche bez. in Π_1, Π_2 gelegen und auf der Projectionsaxe, aber in verschiedenen Punkten senkrecht sind, gehört keine endliche Gerade g im Raume, deren Projectionen sie sind.

Sind γ_1 und γ_2 identisch, so stehen g_1 und g_2 in demselben Punkte auf a normal; den identischen Ebenen γ_1 und γ_2 sind alle Geraden gemein.

Also: *Zwei Geraden g_1 und g_2, welche bez. in Π_1, Π_2 liegen und in demselben Punkte auf a normal stehen, sind gemeinsame Projectionen von ∞^2 Geraden, allen Geraden der Ebene, die in diesem Punkte auf a senkrecht steht (mit Ausnahme derjenigen, die auf Π_1 oder Π_2 normal sind).*

Zwei solche Geraden als Projectionen fixiren also keine bestimmte Gerade im Raume; und jede Gerade, welche zwei solche Projectionen hat und dann also in einer zur Axe senkrechten Ebene liegt und deshalb selbst zur Axe (im allgemeinen windschief) senkrecht ist, ist durch diese Projectionen nicht bestimmt, sondern theilt sie noch mit ∞^2 andern Geraden, muss also anders fixirt werden; was dadurch geschieht, dass entweder zwei Punkte auf ihr durch ihre Projectionen gegeben sind (denn bei Punkten findet eine solche Unbestimmtheit nie statt) oder ihre Projection auf einer dritten Ebene, die zu keiner der beiden ersten parallel ist, hinzugefügt wird.

Die Schnittlinie $\gamma_1\gamma_2$ wird auf einer Π senkrecht sein, z. B. auf Π_1, wenn g_2 so liegt, dass γ_2 nicht blos auf Π_2, sondern auch auf Π_1 senkrecht ist, d. h. wenn g_2 zu a normal ist.

Zwei Geraden g_1, g_2 bez. in Π_1, Π_2, von denen die eine, z. B. g_2, senkrecht auf der Axe ist, die andere nicht, entspricht keine Gerade im Raume, von der sie die Projectionen sind; denn die Schnittlinie der zugehörigen Ebenen γ_1, γ_2 hat zwar in Π_2 die g_2, in Π_1 aber nur einen Punkt von g_1 zur Projection. Es wurde vorhin in Nr. 50 der Satz von Nr. 12 benutzt ohne Berücksichtigung des parenthetischen Zusatzes, der also in diesem Ausnahmefalle zur Geltung kommt.

Lassen wir aber die Auffassung (Nr. 4, 8) gelten, dass als Projection einer solchen in einen Punkt sich projicirenden Gerade jeder Strahl um diesen Punkt in der Projectionsebene angesehen werden kann, so kann g_1 als Projection aufgefasst werden; und wir haben keine Ausnahme.

52. Haben zwei Geraden g und l die eine Projection gemein, z. B. $g_1 \equiv l_1$, ohne dass dasselbe für die andere gilt, so sind sie verschieden. Beide liegen dann in der gemeinsamen ersten projicirenden Ebene ($\gamma_1 \equiv \lambda_1$) und haben also gewöhnlich einen endlichen Punkt gemein, ausnahmsweise ihren unendlich fernen oder sind parallel. Ist das letztere der Fall, so müssen ihre zweiten Projectionen g_2, l_2 parallel sein, und umgekehrt, wenn $g_2 \parallel l_2$, so ist auch $g \parallel l$ (Nr. 8). Schneiden sich g und l, so ist die zweite Projection des Punktes gl der Punkt $g_2 l_2$, durch dessen Herablothen auf $g_1 \equiv l_1$ die erste Projection erhalten wird.

Also sind zwei Geraden, welche die eine Projection gemeinsam haben, nie windschief, sondern schneiden sich oder sind parallel; und ob dies oder jenes der Fall ist, ist an ihren andern Projectionen zu erkennen.

53. *Wenn zwei Geraden* $g = (g_1, g_2)$ *und* $l = (l_1, l_2)$, welche keine ihrer gleichnamigen Projectionen gemeinsam haben, *sich schneiden*, so müssen g_1 und l_1 in der ersten Projection, g_2 und l_2 in der zweiten Projection des Schnittpunktes sich begegnen, und daher *muss* — Vereinigung der Projectionsebenen vorausgesetzt — *die Verbindungslinie der Punkte* $g_1 l_1$ *und* $g_2 l_2$ *senkrecht zur Axe sein.*

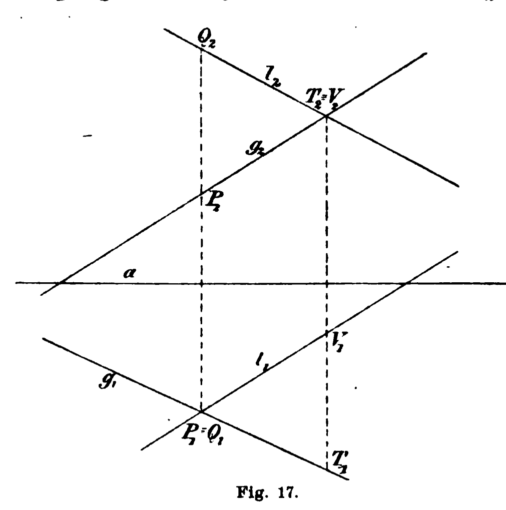


Fig. 17.

Wenn g *und* l *parallel sind, so sind sowohl* g_1 *und* l_1, *als* g_2 *und* l_2 *parallel* (Nr. 7).

Schneiden sich also sowohl g_1 *und* l_1 *in einem (endlichen) Punkte, als auch* g_2 *und* l_2 *und liegen diese Punkte* $g_1 l_1$ *und* $g_2 l_2$ *so, dass sie nicht Projectionen eines Punktes sein können* (Nr. 42, 43), *so sind die Geraden* g *und* l *windschief* (Fig 17).

Das in $g_1 l_1$ auf Π_1 errichtete Loth trifft dann die beiden Geraden g und l in verschiedenen Punkten P und Q, welche beide $g_1 l_1$ zur ersten Projection haben, dagegen verschiedene zweite Projectionen P_2, Q_2, welche von der durch $g_1 l_1$ gehenden Ordinatenlinie geliefert werden. An der Lage von P_2, Q_2 erkennt man, dass die Gerade l an der Stelle, wo sie sich für einen, der in der Richtung der ersten Projectionsstrahlen (streng genommen aus unendlicher Entfernung) von der positiven Seite der Π_1 her sieht, *scheinbar* mit g schneidet, *über* g

geht. Das in $g_2 l_2$ auf Π_2 errichtete Loth trifft ebenfalls g und l in verschiedenen Punkten T, V, deren erste Projectionen T_1, V_1 die durch $g_2 l_2$ gehende Ordinatenlinie giebt. Die Lage von T_2, V_2 zeigt, dass die Gerade g an der Stelle, wo sie sich für einen, der in der Richtung der zweiten Projectionsstrahlen von der positiven Seite der Π_2 her sieht, mit l zu kreuzen *scheint, vor* l läuft.

54. Wir haben aber noch umgekehrt nachzuweisen, dass, *wenn die Verbindungslinie von $g_1 l_1$ und $g_2 l_2$ normal zur Axe ist, g und l einen Punkt gemeinsam haben, also in derselben Ebene liegen.* Da $g_1 l_1 = P_1$ und $g_2 l_2 = P_2$ eine zu a normale Verbindungslinie haben, so sind sie Projectionen eines und desselben Punktes P im Raume (Nr. 43); weil nun P_1 auf g_1, P_2 auf g_2 liegt, so liegt P auf g; ebenso weil P_1 auf l_1, P_2 auf l_2 liegt, liegt P auf l.

Wenn sowohl $g_1 \parallel l_1$, als auch $g_2 \parallel l_2$, so ist auch $g \parallel l$.

Da $g_1 \parallel l_1$, so sind die in ihnen auf Π_1 senkrechten Ebenen γ_1 und λ_1 ebenfalls parallel; ebenso ist $\gamma_2 \parallel \lambda_2$, weil $g_2 \parallel l_2$. Legt man eine beliebige Ebene normal zu $g = \gamma_1 \gamma_2$, also auch normal auf γ_1 und γ_2, so ist sie auch normal zu den parallelen Ebenen λ_1, λ_2, mithin auch zu deren Schnittlinie l; so dass g und l beide auf derselben Ebene senkrecht sind.

Sind g_1 und l_1 parallel, g_2 und l_2 aber nicht (oder umgekehrt), so sind g und l windschief.

Hat g in der einen Π, z. B. in Π_1, einen Punkt zur Projection, so schneidet sie die Gerade $l = (l_1, l_2)$, oder ist zu ihr windschief, je nachdem der Punkt g_1 auf l_1 liegt, oder nicht. Im ersteren Falle sind die Punkte g_1 und $g_2 l_2$ die Projectionen des Schnittpunktes.

Werden eine Anzahl von Strecken (Kräften) durch Parallelverschiebung unter Festhaltung ihrer Länge und ihres Sinnes aneinander gereiht, so dass Endpunkt und Anfangspunkt zweier aufeinander folgenden zusammenfallen, so erhält man ihr Streckenpolygon (Kräftepolygon) $C_0 C_1 C_2 \ldots C_n$. Die Schlussstrecke $C_0 C_n$ heisst ihre *geometrische Summe.*

Man construire für durch ihre Projectionen dargestellte Strecken diese geometrische Summe. Handelt es sich um Kräfte, deren Wirkungslinien durch einen Punkt gehen, so ist die ebenfalls auf eine Gerade durch diesen Punkt verlegte geometrische Summe ihre Resultirende.

55. Für vereinigte Projectionsebenen gilt Folgendes. Liegt ein Punkt im ersten oder dritten Raume, so befinden sich seine Projectionen auf verschiedenen Seiten der Projectionsaxe und können nicht sich decken. Hingegen können Punkte des zweiten oder vierten Raumes *zusammenfallende Projectionen* haben, sobald nämlich ihre bei-

den Ordinaten oder Abstände absolut gleich sind. *Offenbar haben alle Punkte der Ebene* Γ, *welche den Flächenwinkel zwischen* Π_2+ *und* Π_1- *und den Scheitel-Flächenwinkel* (Π_1+, Π_2-) *halbirt, und nur die Punkte dieser Ebene vereinigte Projectionen.*

Eine Gerade g, welche in Γ liegt, hat daher auch identische Projectionen, und umgekehrt, eine Gerade mit sich deckenden Projectionen liegt in Γ.

Die Ebene Γ heisst deshalb *die Ebene der Deckelemente.*

Die beiden Projectionen g_1 und g_2 irgend einer Gerade g haben einen Punkt gemein: in ihm sind die Projectionen des Schnittpunktes von g mit Γ vereinigt. Je nachdem also g_1 und g_2 einen endlichen Punkt gemein haben, oder ihren unendlich fernen, also parallel sind, oder ganz identisch sind; ist g gegen Γ geneigt, oder zu ihr parallel, oder liegt ganz in Γ.

Die Ebene Σ, welche die Winkel (Π_1+, Π_2+) und (Π_1-, Π_2-) halbirt, enthält alle Punkte, deren Projectionen zu beiden Seiten gleich weit entfernt von a, also symmetrisch in Bezug auf a liegen. Jede Gerade in Σ hat Projectionen, die einander und die Gerade selbst auf a treffen und deren Winkel durch a halbirt wird (bez. wenn sie beide und die Gerade selbst zu a parallel sind, gleichweit von a abstehen), mithin ebenfalls in Bezug auf a symmetrisch sind. Ist eine Gerade parallel zu Σ, so bilden ihre Projectionen gleiche Winkel mit a, ohne sich auf a zu schneiden und ohne einander parallel zu sein. Auf jeder andern Gerade g giebt es einen (endlichen) Punkt, dessen Projectionen in Bezug auf a symmetrisch sind, den Punkt $g\Sigma$.

Auch bei Projectionsebenen Π_1, Π_2, welche nicht einen rechten Winkel bilden, ist die eine der Halbirungsebenen der Flächenwinkel eine Ebene Γ der Deckelemente und die andere eine Ebene Σ der Elemente mit symmetrischen Projectionen.

c) Darstellung der Ebene.

56. Jede Ebene E hat in jeder der beiden Projectionsebenen *eine Spur, die erste* s' *und die zweite* s''. *Trifft* E *die Projectionsaxe, so gehen durch diesen Punkt* (Axenschnitt) *beide Spuren; ist* E *der Axe parallel, so sind auch beide Spuren ihr parallel.*

Nach der perspectiven Ansicht vereinigt sich beides in den Satz: Die beiden Spuren einer Ebene treffen sich auf der Axe.

Jede der Spuren fällt mit ihrer gleichnamigen Projection zusammen, die andere ist die Axe.

Der Winkel, den die Spuren bei vereinigten Projectionsebenen bilden, ist natürlich nicht ihr eigentlicher Winkel.

Wir haben *erste und zweite Spurparallelen* h', h''. Weil h' zu s' parallel ist, so ist es auch die gleichnamige Projection h_1' (Nr. 6, 8); weil ferner h' zu Π_1 parallel ist, so ist h_2' zu a parallel (Nr. 47); oder auch: die Projectionen h_2' und a von h' und s' auf Π_2 sind parallel, weil h' und s' es sind. Ebenso ist h_2'' zu s'' und h_1'' zu a parallel.

Die gleichnamigen Projectionen einer Spurparallele sind zur gleichnamigen Spur parallel, die ungleichnamigen zur Axe.

57. *Ist* E *parallel zu einer Projectionsebene,* z. B. zu Π_1, so hat sie nur eine endliche Spur s'', die andere s' ist unendlich fern.

Die endliche zweite Spur und die Axe sind parallel als Schnitte der parallelen Ebenen E und Π_1 mit Π_2.

Also trifft auch s'' die Axe a im unendlich fernen Punkte, wie die unendlich entfernte s', und der obige Satz bleibt bestehen.

Da E auf Π_2 senkrecht steht, so ist s'' auch die zweite Projection von E.

Es sei E *normal zu einer Projectionsebene*, z. B. zu Π_1, ohne der andern parallel zu sein; s' schneidet dann a in einem endlichen Punkte und *die zweite Spur* s'' *steht in diesem Punkte auf* a *normal;* denn sie ist die Schnittlinie der beiden zu Π_1 normalen Ebenen E und Π_2, also selbst zu Π_1 normal, folglich auch zu a.

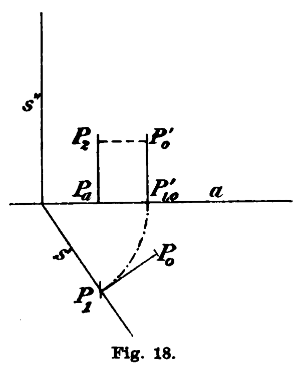


Fig. 18.

Da Π_1 auf E und auf Π_2 normal ist, so ist der Winkel der Geraden s' und a, in denen diese von jener getroffen werden, der Neigungswinkel von E gegen Π_2.

Die Umlegung einer solchen Ebene in die Π_1 ist der Hauptsache nach schon in Nr. 28 besprochen worden; $P_1 P_0$ für einen Punkt in ihr steht in P_1 auf der Spur s' senkrecht und ist gleich der zweiten Ordinate $P_a P_2$ (Fig. 18). Aber auch die Umlegung in die andere Projectionsebene Π_2 ist einfach; man überträgt P_1 durch einen Kreisbogen um den Axenschnitt $s's''$, immer in demselben Drehsinne, auf die Axe und schneidet das Loth auf a in dem erhaltenen Punkte $P_{1,0}'$ mit der Parallele durch P_2 zur Axe; der Schnittpunkt ist die gewünschte Umlegung P_0' von P.

Steht eine Ebene E auf beiden Projectionsebenen, mithin auch auf a senkrecht, so stehen beide Spuren in demselben Punkte auf a normal und decken sich bei vereinigten Projectionsebenen.

Die Geraden einer solchen Ebene sind durch ihre Projectionen nicht bestimmt (Nr. 51), wohl aber die Punkte. Durch jeden Punkt im Raume geht eine zu a senkrechte Ebene.

58. *Wenn zwei Ebenen parallel sind, so ist jede der Spuren der einen Ebene mit der gleichnamigen der andern parallel,* weil sie Schnitte von parallelen Ebenen mit einer dritten sind.

Umgekehrt, *sind die Spuren einer Ebene (ohne selbst parallel zu sein) mit denen einer andern Ebene parallel, so sind auch beide Ebenen parallel;* denn diese Ebenen enthalten dann Winkel mit parallelen Schenkeln. *Sind hingegen die Spuren der einen und der andern Ebene selbst schon parallel, so kann man nur auf den Parallelismus der Ebenen (und also auch ihrer Schnittlinie) mit der Axe schliessen.*

59. *Wenn die Gerade g auf der Ebene E senkrecht steht, so ist sowohl g_1 senkrecht auf s' und den h_1', als auch g_2 auf s'' und den h_2''* (Nr. 30).

Wir fanden dort, dass, wenn man blos weiss, dass g_1 auf s' (oder einer h_1') senkrecht ist, man keinen Schluss machen kann.

Nunmehr aber gilt der Satz:

Wenn g_1 senkrecht ist auf s' oder einer h_1' (und dann allen) *und zugleich g_2 senkrecht auf s'' oder einer h_2''* (und dann allen), *so steht g senkrecht auf der Ebene E, von der s', s'' die Spuren und die h', h'' Spurparallelen sind;* vorausgesetzt jedoch, dass g vollständig durch ihre Projectionen g_1, g_2 bestimmt ist, d. h. dass die projicirenden Ebenen γ_1, γ_2 von g sich nicht decken (Nr. 51).

In der That, da s' auf g_1 normal ist, der Schnittlinie der beiden zu einander senkrechten Ebenen Π_1 und γ_1, und in Π_1 liegt, so ist sie zu γ_1 normal und folglich auch die durch s' gehende Ebene E auf γ_1 senkrecht. Aus der zweiten Voraussetzung: $g_2 \perp s''$ folgt ebenso, dass E senkrecht zu γ_2 ist; folglich steht auch die Schnittlinie g von γ_1, γ_2 auf E senkrecht.

Dieser Schluss wird ersichtlich hinfällig, wenn γ_1 und γ_2 identisch sind. — Beachten wir aber, dass im Beweise die Rechtwinkligkeit von Π_1 und Π_2 nicht vorkommt, also nicht vorausgesetzt zu werden braucht.

60. Durch ihre beiden Spuren ist eine Ebene eindeutig bestimmt, ausser in dem Falle, wenn sie sich in der Axe vereinigen, wo man dann zur vollständigen Bestimmung der Ebene noch einen ihr angehörigen Punkt geben kann. *Aber diese Bestimmung durch die Spuren ist nur ein besonderer Fall der Bestimmung der Ebene durch zwei in ihr befindliche Geraden, also zwei sich schneidende Geraden,* worin, nach der perspectiven Ansicht, der Fall zweier parallelen Geraden mit inbegriffen ist. *Auf diese Bestimmung durch zwei sich schneidende Geraden lassen sich die Bestimmung der Ebene durch drei nicht in gerader Linie befindliche Punkte und durch eine Gerade und*

einen ihr nicht angehörigen Punkt, mit ihren Specialfällen (Nr. 36) *zurückführen,* indem wir bei jener einen der drei Punkte mit den beiden andern, bei dieser den Punkt mit einem Punkte der Gerade verbinden.

Wenn eine Ebene E in dieser *allgemeineren* Weise durch zwei sich schneidende Geraden g und l bestimmt ist, so können wir sofort ihre *Spuren* herstellen. Jede der beiden Spuren einer in E befindlichen Gerade liegt auf der gleichnamigen Spur von E. Die Spur s' von E verbindet daher die ersten Spuren von g und l, die s'' die zweiten, welche Spuren wir nach Nr. 46 construiren. Als Controlle haben wir, dass s' und s'' sich auf a treffen müssen.

Aber diese Ermittelung der Spuren ist für viele Aufgaben nicht nöthig, welche sich ebenso bequem lösen, wenn allgemein g und l, als wenn speciell die Spuren gegeben sind. Da aber immerhin die Bestimmung der Ebene durch die Spuren eine sehr häufige ist, so wollen wir die wichtigsten Aufgaben auch für diesen Fall behandeln.

61. *Wenn man in eine gegebene Ebene* E *einen Punkt oder eine Gerade legen will, so kann man die eine Projection dieses Elements beliebig geben;* und die Aufgabe hat dann im allgemeinen *eine* Lösung, denn der projicirende Strahl, die projicirende Ebene durch diese Projection treffen E in einem Punkte, einer Gerade. Eine Ausnahme macht nur der Fall, dass E auf derjenigen Projectionsebene senkrecht steht, in der die Projection gegeben ist; es muss in ihm die gegebene Projection eines Punktes auf der Spur der Ebene in dieser Π liegen, diejenige einer Gerade mit ihr zusammenfallen; und dann hat man ∞^1, bez. ∞^2 Lösungen, also eine unbestimmte Aufgabe.

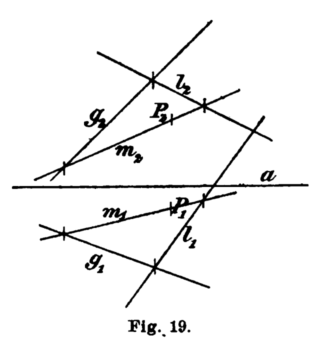


Fig. 19.

Jede Gerade, welche in einer durch zwei sich schneidende Geraden g, l bestimmten Ebene liegt, muss diese beiden Geraden (im weiteren Sinne der perspectiven Ansicht) schneiden. *Es sei m_1 ihre bekannte Projection* (Fig. 19); so hat man die Schnittpunkte $g_1 m_1$ und $l_1 m_1$ bez. auf g_2 und l_2 zu lothen; m_2 verbindet die erhaltenen Punkte. Ist etwa m_1 zu g_1 parallel, so ist $g_1 m_1$ unendlich fern und wird in den unendlich fernen Punkt von g_2 gelothet und m_2 wird zu dieser parallel, m zu g.

Entsprechend findet man m_1 aus m_2.

Wir wollen in die Ebene E $= gl$ *je eine Spurparallele von beiden Arten legen;* für jede wissen wir, dass die ihr ungleichnamige Projection der Axe parallel sein muss. Man zieht daher (Fig. 20) h_2'

parallel der Axe und construirt nach Obigem h_1', und ebenso zieht man h_1'' parallel der Axe und construirt h_2''; zu h_1' ist s', zu h_2'' ist s'' parallel.

Ist nun noch ein beliebiger Punkt P gegeben, so ziehe man durch P_1 die Senkrechte p_1 zu h_1' (oder s', wenn diese construirt oder gegeben ist), durch P_2 diejenige p_2 zu h_2'' (oder s'') und hat dann in p_1, p_2 die Projectionen *des Loths p aus P auf* E (Nr. 59).

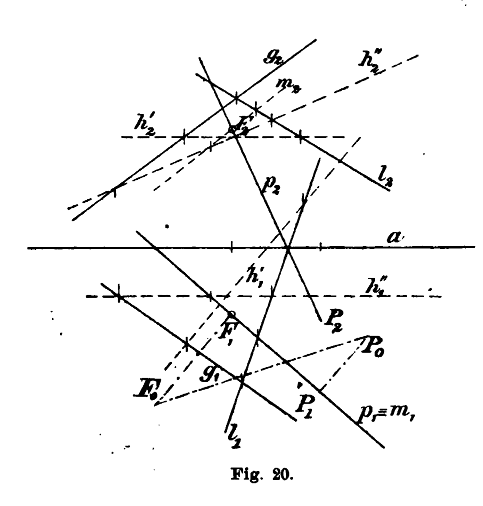


Fig. 20.

Soll in die Ebene E *ein Punkt gelegt werden, von dem etwa P_1 gegeben ist,* so construire man (Fig. 19) eine ihn enthaltende Gerade in der Ebene; man wird also m_1 durch P_1 ziehen, daraus, wie oben, m_2 construiren und auf diese nach P_2 die Projection P_1 lothen.

Man beachte, dass die Richtung von m_1 nicht vorgeschrieben ist und daher beliebig gewählt werden kann; man darf also m_1 so ziehen, dass ungünstig gelegene Schnitte $g_1 m_1$, $l_1 m_1$ vermieden werden.

Wenn E $= (g, l)$ und eine Gerade m oder ein Punkt P gegeben sind, so construire man in E die Gerade, den Punkt, welche mit m, P die eine Projection gemeinsam hat. An den andern Projectionen wird man dann feststellen, ob m oder P thatsächlich ausserhalb E liegt oder etwa in dieser Ebene.

Oben war m_1 *gegeben;* sollten da ungünstig gelegene Schnitte mit g_1 oder l_1 sich ergeben, so kann diesem Uebelstande meistens dadurch abgeholfen werden, dass man zunächst eine günstiger gelegene Gerade, bei der man über die bekannte Projection verfügen kann, in die Ebene legt, durch welche man eine der gegebenen Geraden ersetzt. Z. B. ist in Fig. 20, wo E durch g, l bestimmt ist, um zu $m_1 \equiv p_1$ die m_2 zu finden, g durch h'' ersetzt.

Es ist empfehlenswerth, sich in der Ueberwindung solcher durch den beschränkten Raum des Zeichenblattes entstehenden Schwierigkeiten zu üben.

62. Wir lösen jetzt dieselben Aufgaben *für den Fall, dass die Ebene* E *durch ihre Spuren s', s'' gegeben ist.* Diese treten an Stelle von g, l, oder genauer: an Stelle von g_1, g_2 treten s' und a, und an Stelle von l_1, l_2 treten a und s''. Ist daher (Fig. 21) wiederum m_1 für

eine *Gerade m* der Ebene gegeben, so hat man sie mit s' und a (als ersten Projectionen von s' und s'') in Q_1 und R_1 zu schneiden, diese Schnitte auf a und s'' zu lothen und die erhaltenen Punkte R_2 und Q_2 durch m_2 zu verbinden. Man ersieht, dass man in $m_1 s'$ und $m_2 s''$ die erste und zweite Spur R, Q von m construirt hat; deren ungleichnamige Projectionen sind die auf a gelegenen Punkte.

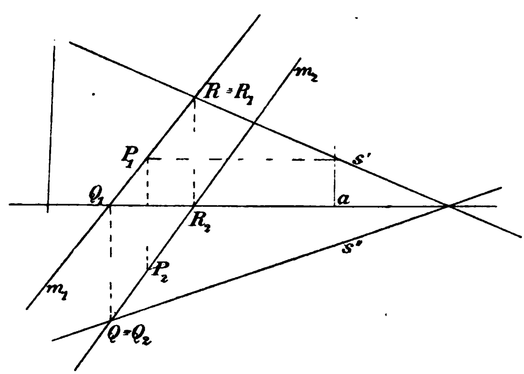


Fig. 21.

Wollen wir in eine durch ihre Spuren bestimmte Ebene eine erste *Spurparallele* h' legen, so haben wir (Fig. 22) h_1' parallel zu s' zu ziehen, den Schnitt $h_1'a = Q_1$ auf s'' zu lothen und durch den erhaltenen Punkt Q_2 die Parallele h_2' zu a zu ziehen. Die beiden construirten Punkte sind die Projectionen der zweiten Spur Q von h'. Entsprechend construire man eine zweite Spurparallele. Jede zwei Geraden, welche man in dieselbe Ebene gelegt hat, controllire man in Bezug auf ihren Schnitt.

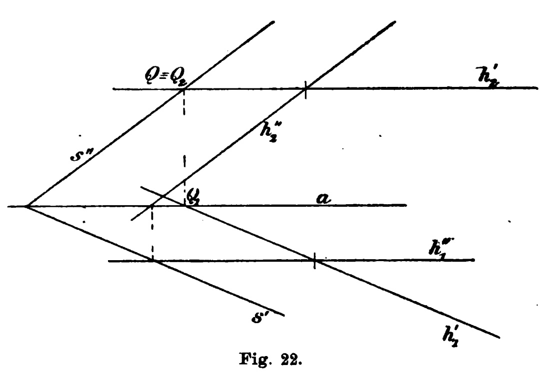


Fig. 22.

Will man eine erste *Spurnormale* f' in die Ebene legen, so hat man f_1' normal zu s' oder einer h_1' zu ziehen und dann f_2' zu construiren.

Die Aufgabe: in eine durch ihre Spuren gegebene Ebene einen *Punkt* zu legen, wird ebenso behandelt, wie oben, wo für die Ebene zwei sich schneidende Geraden gegeben waren (Fig. 21).

63. Wir wenden uns jetzt zur Aufgabe: *Eine gegebene Ebene* $\mathsf{E} = (g, l)$ [oder (s', s'')] *mit einer gegebenen Gerade n zu schneiden.* Verschaffen wir uns eine in der Ebene gelegene und die n schneidende Gerade, so haben wir in deren Schnittpunkt den gesuchten Punkt. Eine Gerade aber, welche mit n die eine Projection gemein hat, schneidet sie (im weiteren Sinne) (Nr. 52). Daher construiren wir

nach Nr. 61 oder 62 (Fig. 23, in der E durch s', s'' gegeben ist) in der Ebene die Gerade m, welche mit n die eine Projection gemeinsam hat, etwa die erste; der Punkt $n_2 m_2 = P_2$ ist dann die zweite Projection des gesuchten Schnittpunktes und durch Lothen auf n_1 ergiebt sich die erste P_1.*) Fallen n_2 und m_2 parallel aus, so ist n zu m und E parallel; sind sie identisch, so liegt n in E.

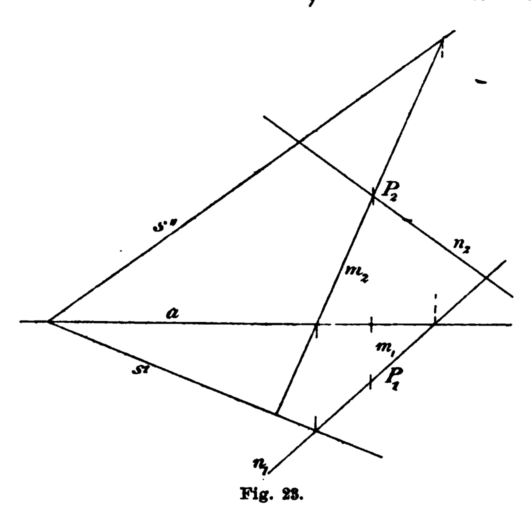


Fig. 23.

Einfacher gestaltet sich die Aufgabe, wenn die Ebene durch ihre Spuren gegeben und zu einer der Projectionsebenen, etwa zu Π_2, normal ist; die zweite Projection des Schnittpunktes muss dann auf s'' liegen, ist also $s''n_2$, durch Lothen auf n_1 ergiebt sich die erste.

Für das oben Nr. 61 construirte *Loth p aus dem Punkte P auf die Ebene* E *ermittle man den Schnitt- oder Fusspunkt F und dann* (Nr. 44) *die wahre Länge des Abstandes PF.* Dies ist in Fig. 20 geschehen, wo E durch g, l bestimmt ist.

Nachdem man in eine gegebene Ebene einen Punkt gelegt hat, kann man auch noch beliebig viele Strahlen des Büschels in ihr um diesen Punkt construiren.

Ebenso mag man, wenn eine Gerade g gegeben ist, für mehrere Ebenen ihres Büschels die Spuren zeichnen, darunter auch für diejenigen Ebenen des Büschels, die bezw. zu Π_1, Π_2 normal, zu a parallel sind.

64. *Die Schnittlinie k zweier Ebenen* E, Φ erhält man, wenn man sich mindestens zwei Punkte von ihr verschafft; man bestimmt sie genauer, wenn man drei ihrer Punkte construirt. Einen solchen der Schnittlinie angehörigen Punkt erhält man, wenn man eine der beiden Ebenen mit einer Gerade, die in der andern liegt, z. B. einer der bestimmenden Geraden schneidet, oder wenn man zwei Geraden, die

---

*) Ist n senkrecht zu Π_1, so kann man (Nr. 4) irgend eine Gerade in Π_1 durch den Punkt, in welchen sich n projicirt, als erste Projection von n ansehen, in welche man m_1 legt. Man erreicht, dass man dann genau zu der obigen Lösung der Aufgabe kommt: In E den Punkt zu construiren, dessen erste Projection in dem Fusspunkt von n gegeben ist.

bezw. in der einen und der andern Ebene liegen und nicht windschief sind, mit einander schneidet. Nicht windschief sind Geraden, welche in der einen Projection übereinstimmen. Man giebt also z. B. eine Gerade $t_1 \equiv u_1$, construirt t_2, u_2 so, dass t in E, u in Φ liegt; den Schnitt $P_2 = t_2 u_2$ lothet man auf $t_1 \equiv u_1$ als P_1 und hat in P einen Punkt der Schnittlinie EΦ. Hat man jene Gerade $t_1 \equiv u_1$ etwa parallel zu a gezogen, so sind die construirten Hilfslinien zweite Spurparallelen, welche aus E und Φ durch dieselbe Parallelebene zu Π_2 ausgeschnitten werden.

In Fig. 24 ist E durch die Parallelen g und l, Φ durch die Parallelen m und n bestimmt; der Punkt P der Schnittlinie k ist in der eben beschriebenen Weise construirt, die Punkte Q und R sind die Schnitte mE, lΦ.

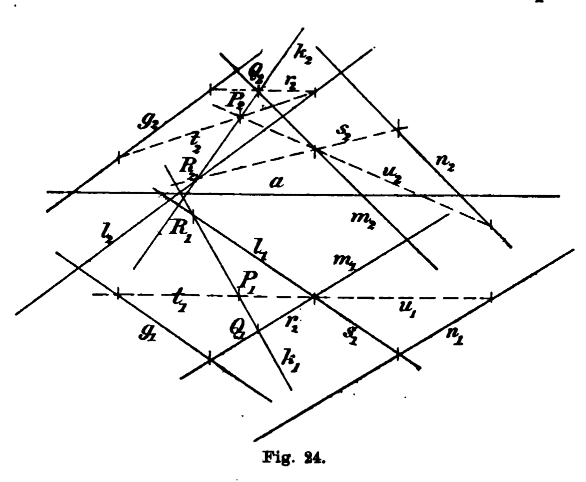


Fig. 24.

Sind die beiden Ebenen durch ihre *Spuren* gegeben: s'_E, s''_E, bezw. s'_Φ, s''_Φ, so sind ja die gleichnamigen Spuren sich schneidende Geraden der einen und der andern Ebene, und die Schnittpunkte sind Punkte der Schnittlinie k, offenbar deren Spuren.

Es seien also (Fig. 25) U der Schnitt der ersten, V der der zweiten Spuren; so ist jener mit U_1, dieser mit V_2 identisch; U_2, V_1 liegen auf a, und $U_1 V_1$, $U_2 V_2$ sind k_1, k_2.

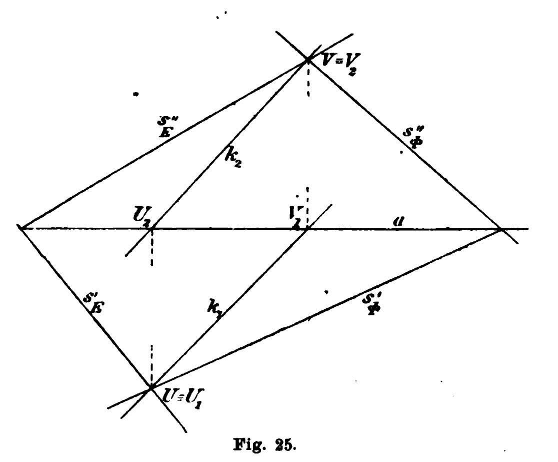


Fig. 25.

Man lasse die einen gleichnamigen Spuren parallel werden, sodann beide Paare, in welchem Falle die Ebenen parallel sind.

Man überzeuge sich, dass, wenn z. B. Φ auf Π_1 senkrecht steht, also s''_Φ auf a, dann k_1 in s'_Φ fällt, welche ja Projection aller Geraden

von Φ in Π_1 ist. Wenn E und Φ beide zu Π_1 normal sind, wird V_1 und $U_1 V_1$ unbestimmt.

Ist Φ nicht blos zu Π_1 senkrecht, sondern zu Π_2 parallel (Fig. 26), so dass $s'_\Phi \equiv k_1$ parallel a ist, so wird k eine zweite Spurparallele in E; in der That, s''_Φ ist unendlich fern, dadurch wird auch $V \equiv V_2$ unendlich fern auf s''_E und k_2 parallel zu dieser Spur. Die Construction ist genau die einer zweiten Spurparallele in E geworden, deren erste Projection bekannt ist.

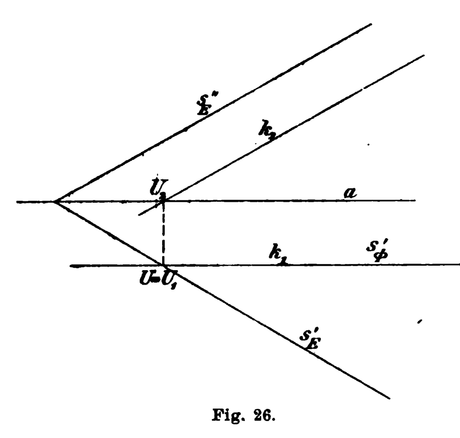


Fig. 26.

Wenn ein ungünstiger Spurenschnitt, etwa U, vorliegt, so verschiebt man die eine Ebene parallel zu sich, Φ nach Φ^*, bis er zu stande kommt, construirt $k^* = \mathrm{E}\Phi^*$, zu der dann $k = \mathrm{E}\Phi$ parallel ist; so dass man k_1 durch V_1 parallel zu k_1^*, k_2 durch V_2 parallel zu k_2^* zu ziehen hat.

65. Die beiden Punkte U, V vereinigen sich und reichen nicht zur Bestimmung von k hin, wenn die Ebenen E und Φ die Axe in demselben Punkte O treffen, in dem dann alle vier Spuren zusammenlaufen und der mit seinen beiden Projectionen sich deckt. Einen zweiten Punkt der Schnittlinie verschafft man sich durch sich schneidende Geraden der einen und andern Ebene. Indem wir oben diese dadurch gewannen, dass wir die eine Projection gemeinsam annahmen, schnitten wir beide Ebenen mit der gemeinsamen projicirenden Ebene. Diese *Hilfsebene* Δ, welche aus E und Φ sich treffende Geraden ausschneidet, braucht aber nicht nothwendig zu der einen Projectionsebene normal zu sein; sie kann in beliebiger Lage angenommen werden (Fig. 27), wenn sie nur bequem zu construirende Schnittlinien $u = \Delta\mathrm{E}$, $t = \Delta\Phi$ liefert. Deren Schnittpunkt $W = ut$ ist dann ein Punkt von $k = \mathrm{E}\Phi$. Am einfachsten sind freilich solche Hilfsebenen Δ, welche zu der einen Projectionsebene senkrecht, und besonders solche, die zur andern parallel sind und dann aus beiden Ebenen Spurparallelen ausschneiden. Man ist bei derartigen Ebenen unbequem gelegenen Schnittpunkten weniger ausgesetzt. Solche einen Punkt der Schnittlinie k liefernden Hilfsebenen sind übrigens ja auch die Projectionsebenen, wenn mit den Spurenschnitten U, V gearbeitet wird, oder die Parallelebene Φ^*, welche den unendlich fernen Punkt von k liefert.

Es ist lehrreich, den verschiedenen Fällen entsprechende Figuren zu machen, vergleichende Beobachtungen daran zu knüpfen und die Erkenntniss sich zu erwerben, dass unendlich ferne Punkte günstiger sind als weit entfernte.

Nach der perspectiven Ansicht subsumirt sich unserm Falle, dass E und Φ die Axe in demselben Punkte O treffen, derjenige, dass beide zur Axe parallel sind; offenbar ist dann ihre Schnittlinie k auch zu derselben parallel, geht nach dem unendlich fernen O, und k_1, k_2 sind auch parallel zu a; einen endlichen Punkt von k erhält man in der eben besprochenen Weise.

Als interessante Anwendung der Aufgaben, durch welche die Construction von Schnittelementen verlangt werden, führen wir die

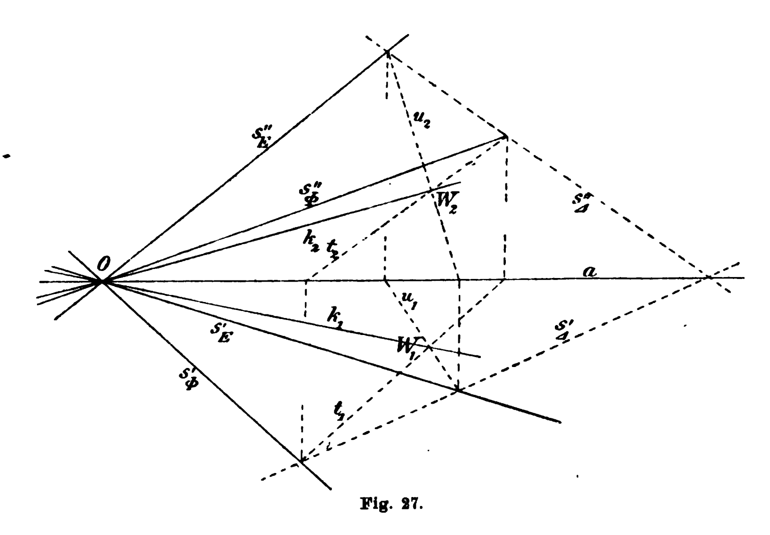


Fig. 27.

Construction des Schattens von Punkten oder Geraden auf eine Ebene bei centralem oder parallelem Lichte an; denn der Schatten, den ein Punkt P, bezw. eine Gerade g auf eine Ebene E wirft, ist, wenn L der leuchtende Punkt ist, der Schnitt der Gerade LP oder der Ebene Lg mit E. Ebenso kommen bei der Construction des Schnitts der Oberflächen zweier Polyeder diese Aufgaben zur Verwendung; die Ebenen, in denen sich die Polygone derselben befinden, sind dann am besten durch zwei Seiten derselben bestimmt; die Heranziehung der Spuren würde die Construction unnöthig complicirt machen.

66. Wenn die Projectionen einer ebenen Figur vorliegen, z. B. diejenigen einer Seitenfläche eines (durch seine Projectionen dargestellten) Polyeders, so wird man gut thun, die „Ebenheit“ möglichst zu bestätigen, indem man wiederholt folgende Construction vornimmt:

Sind $g, l, m, n, \ldots$ Geraden, welche der Figur angehören, so schneide man die einen Projectionen, etwa $g_1, l_1, \ldots$, mit einer Gerade r_1, lothe die Schnitte auf $g_2, l_2, \ldots$ und muss, wenn die Figur wirklich eben ist, in gerader Linie r_2 befindliche Punkte erhalten; da ja die Gerade der Ebene, deren Projection r_1 ist, alle die Geraden $g, l, \ldots$ schneiden muss. Aehnliches gilt für eine krummlinige ebene Figur.

Ein Dreieck PQR ist immer eben, seine Ebene sei durch die Seiten begrenzt (Fig. 28), und g sei eine Gerade, welche diese begrenzte Ebene (also innerhalb des Dreiecks) trifft in dem Punkte M, der nach Nr. 63 construirt ist. Stellen wir uns die Dreiecksebene materiell vor, so wird g theilweise verdeckt sein, und zwar, da die Sehrichtung für die beiden Projectionsebenen verschieden ist, in beiden möglicherweise verschiedenartig. Betrachten wir *die Sichtbarkeit in* Π_1; g_1 schneidet zwei Seiten von $P_1 Q_1 R_1$, nämlich $P_1 Q_1$, $Q_1 R_1$, also durchschneidet sich g *scheinbar* mit PQ, QR. Es heisse der Punkt $(g_1, P_1 Q_1)$, je nachdem er zu g_1 oder $P_1 Q_1$ gehört, J_1 oder K_1; man lothe ihn bez. auf g_2 und $P_2 Q_2$ als J_2, K_2. Da K_2 über J_2 liegt, so beweist dies, dass für den in der Richtung der ersten Projectionsstrahlen (von oben nach unten) Sehenden an der Stelle des scheinbaren Schnitts die Dreiecksseite PQ über der g weggeht. Da g bei M durch die Dreiecksebene geht, so geht an der Stelle des scheinbaren Schnitts von g und QR erstere über der letzteren weg, wie dies auch der Uebung halber noch genauer untersucht werden mag. Folglich ist g unterhalb J sichtbar, von J bis M unsichtbar, von M nach oben sichtbar; $J_1 M_1$ ist also zu punktiren, die beiden andern Theile sind auszuziehen.

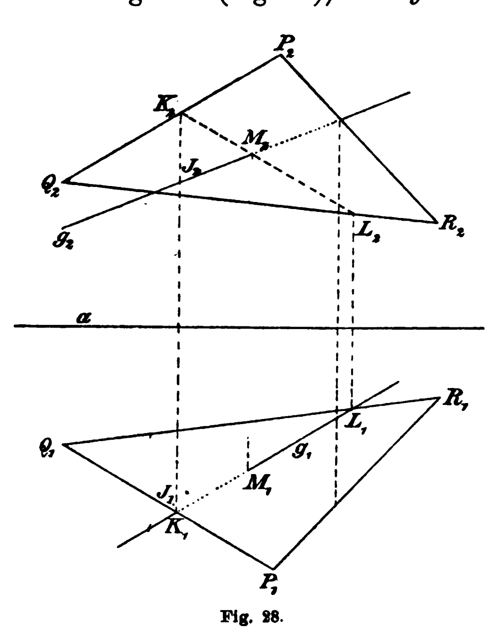


Fig. 28.

Ebenso ist die Sichtbarkeit in der zweiten Projectionsebene zu untersuchen.

Zwei Dreiecksebenen durchdringen sich (Nr. 64) und bedecken sich gegenseitig theilweise; es ist die Sichtbarkeit der einzelnen Theile näher zu untersuchen.

Giebt man mehr als drei Punkte vollständig, d. h. durch beide Projectionen, und verbindet sie zu einem einfachen Polygone, so ist dieses im allgemeinen uneben.

Soll das Polygon eben sein, so wird man nur drei von den Eckpunkten vollständig geben können, von den übrigen nur je eine Projection, indem die andere Projection dann so zu construiren ist, dass der betreffende Punkt in der durch die drei ersten Punkte bestimmten Ebene liegt (Nr. 61).

Sind also P, Q, R die vollständig gegebenen Punkte*); von einer vierten Ecke M sei bloss M_1 gegeben; so ziehe man z. B. M_1P_1, lothe den Punkt $(M_1P_1, Q_1R_1) = N_1$ auf Q_2R_2 als N_2 und dann M_1 auf P_2N_2 als M_2 (Fig. 29, Taf. I). Als Controlle dient eine Wiederholung der Construction in anderer Gruppirung. Die schon erhaltenen Punkte können natürlich für die Construction der weitern an Stelle der ursprünglichen treten.

67. Man wird aber bald bemerken, dass zwischen den beiden Feldern (von Punkten und Geraden), die sich durch die Projectionen des Feldes von Punkten und Geraden einer Ebene E auf beide Projectionsebenen ergeben, Vereinigung derselben vorausgesetzt, eine ähnliche Beziehung statt hat, wie zwischen den durch eine Projection und durch Umlegung entstandenen (Nr. 23), nämlich Affinität.

Zunächst ist klar, dass wenn P_1 auf g_1 liegt, dann P auf g in E liegt (Nr. 6, 8) und also P_2 auf g_2; ebenso umgekehrt.

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte P_1 und P_2 sind ferner alle parallel, weil sie auf der Axe normal sind.

Endlich in jeden Punkt, in dem sich zwei entsprechende Geraden g_1, g_2 (Projectionen derselben Gerade g in E) schneiden, sind die Projectionen des Punktes von g zusammengefallen, in dem sie die Ebene Γ der Deckelemente trifft (Nr. 55); alle diese Punkte liegen für die Geraden von E auf einer Gerade, nämlich auf $\Gamma\mathsf{E} = m$, der einzigen Gerade in E, deren Projectionen m_1 und m_2 sich vereinigen: in m_{12}. Auf dieser m_{12} treffen sich also alle entsprechenden Geraden g_1 und g_2 (bez. sind ihr beide parallel). Man sehe die Fig. 29, Taf. I.

Es sind nun alle Bedingungen der Affinität nachgewiesen.

Die beiden Felder, welche durch die Projectionen einer Ebene E *auf* Π_1 *und* Π_2 *sich ergeben, sind, wenn diese Ebenen vereinigt gedacht werden,*

*) Es ist zu empfehlen, zur Bestimmung der Ebene nicht drei Nachbarpunkte, sondern ziemlich weit aus einander liegende Punkte zu wählen, denn je weiter die bestimmenden Punkte einer Gerade oder Ebene aus einander liegen, desto genauer ist die Zeichnung. Diese graphische Regel suche man so viel wie möglich zu befolgen.



affin; Affinitätsaxe ist die identische erste und zweite Projection der Gerade, in welcher E *die Ebene* Γ *der Deckelemente durchschneidet.*

Diese Affinität mit Affinitätsstrahlen, welche zu a senkrecht sind, bleibt bestehen, wenn der rechte Winkel der Projectionsebenen aufgegeben wird, beide Projectionen aber orthogonal erfolgen.

Sie ist auch eine werthvolle Controlle für die Ebenheit einer Figur.

Um *die Affinitätsaxe zu ermitteln,* suche man also die Schnittpunkte der Projectionen irgend zweier Geraden g und l der Ebene, z. B. derjenigen, durch welche man sich die Ebene bestimmt gedacht hat. Graphisch empfiehlt es sich freilich, diese Gerade, von der die ganze weitere Construction abhängt, durch mehr als zwei Punkte zu bestimmen.

Sind etwa l_1 und l_2 parallel, so ist auch m_{12} mit ihnen (die Ebene Γ mit l) parallel; sind sowohl l_1 und l_2, als auch g_1 und g_2 parallel, aber jene nicht diesen, so hat m_{12} zwei verschiedene unendlich ferne Punkte $g_1 g_2$, $l_1 l_2$, ist mithin selbst unendlich fern. In der That, l sowohl wie g ist dann parallel mit Γ, und da sie einander nicht parallel sind, so ist $\mathsf{E} = gl$ parallel mit Γ, die Schnittlinie m also unendlich fern; jede Gerade in E ist mit Γ parallel, ihre Projectionen sind unter einander parallel.

Sind die Punkte $g_1 g_2$ und $l_1 l_2$ identisch (was z. B. auch eintritt, wenn alle vier Geraden $g_1, \ldots$ parallel sind), so genügen sie natürlich nicht zur Bestimmung von m_{12}. Dieser Fall liegt vor, wenn die Ebene durch ihre Spuren bestimmt ist; denn $s_1' = s'$, $s_2' = a$; $s_1'' = a$, $s_2'' = s''$; aber sowohl $s_1' s_2'$ als $s_1'' s_2''$ ist der Punkt $s' s''$ auf der Projectionsaxe. Jedenfalls liegt dieser Punkt auf der Affinitätsaxe und kann mit zu ihrer Festlegung dienen.

Die Richtung der Affinitätsstrahlen ist ein für alle Male bekannt als zur Projectionsaxe normal. Kennt man nun noch die Affinitätsaxe m_{12} und ein Paar entsprechender Geraden g_1, g_2, so kann man zu jeder Gerade, jedem Punkte des einen Feldes die entsprechende Gerade, den entsprechenden Punkt im andern construiren, z. B. zu der ersten Projection b_1 einer Gerade b in E die zweite b_2; b_2 und b_1 müssen sich auf m_{12} begegnen. Durch den Punkt $g_1 b_1$ ziehe man den Affinitätsstrahl (die Ordinatenlinie) und erhält in dem Punkte, wo derselbe g_2 trifft, einen zweiten bestimmenden Punkt für b_2. Oder es soll zu der ersten Projection P_1 eines Punktes P in E die zweite Projection P_2 gesucht werden. Der Affinitätsstrahl durch P_1 ist der eine Ort für P_2. Man ziehe dann eine beliebige Gerade b_1 durch P_1, welche g_1 in B_1 treffe; der Affinitätsstrahl durch B_1 giebt den entsprechenden Punkt

B_2 auf g_2; die Gerade b_2, welche B_2 mit $b_1 m_{12}$ verbindet, entspricht b_1 und ist ein zweiter Ort für P_2.

Wenn man von zwei entsprechenden Punkten statt von zwei entsprechenden Geraden ausgeht, so ist die Construction von Nr. 24 anzuwenden. Es ist ferner ersichtlich, dass an Stelle der ursprünglichen entsprechenden Elemente schon construirte treten können und oft müssen, wenn unbequeme Lagen, schleifende Schnitte es erfordern.

68. Wir wollen mit den beiden Affinitäten nun folgende zwei Aufgaben construiren.

Die Ebene eines Sechsecks $ABCDEF$ ist dadurch bestimmt, dass drei (nicht benachbarte) Ecken A, C, E durch ihre beiden Projectionen gegeben sind; von den übrigen Ecken B, D, F ist nur die erste Projection (und damit die erste Projection der ganzen Figur) gegeben. Es soll die zweite Projection und die Umlegung in die Projectionsebene Π_1, also die wahre Gestalt construirt werden (Fig. 30, Taf. I).

Wir ermitteln zuerst die Axe m_{12} der Affinität zwischen den Feldern der beiden Projectionen. Sie ist die Verbindungslinie der drei Punkte $(A_1 C_1, A_2 C_2)$, $(A_1 E_1, A_2 E_2)$, $(C_1 E_1, C_2 E_2)$. Nun suche man zu B_1 den entsprechenden Punkt B_2; man verbinde B_1 mit dem weitesten der drei Punkte A_1, C_1, E_1, also in der Figur mit E_1, und durch den Punkt, wo $B_1 E_1$ die Gerade m_{12} trifft, zieht man aus E_2 die Gerade; dieselbe muss B_2 enthalten. In der Figur ist jeder Punkt mehrfach construirt und auch nachträglich sind noch Controllen hinzugefügt.

Hat man nun B_2, D_2, F_2 gefunden und damit die zweite Projection der Figur, so lege man einen Punkt um in die Π_1; dazu ist freilich die erste Spur s' nothwendig. Von ihr ist schon bekannt der Punkt $a m_{12}$ (Nr. 67); theoretisch genügt also noch die erste Spur einer der Seiten oder Diagonalen, praktisch wird man zur genaueren Fixirung dieser wichtigen Linie zwei Spuren construiren und, wie oben gesagt, diese drei bestimmenden Punkte nicht zu nahe an einander zu bringen suchen. Der Punkt $A = (A_1, A_2)$ werde nun nach der früheren Anleitung umgelegt, indem man aus dem Perpendikel $A_1 A'$ aus A_1 auf s' und der zweiten Ordinate $A_2 A_a$ als Katheten die Hypotenuse $A' A_0$ construirt und diese auf dem ersten Perpendikel $A' A_1$ von A' aufträgt. Die früher besprochene Affinität liefert nun die weiteren Umlegungen.

Mit den rechtwinkligen Dreiecken ist controllirt worden.*)

---

*) Es mag hier darauf hingewiesen werden, ohne dass jedoch näher darauf eingegangen werden soll, dass zwischen der zweiten Projection eines ebenen

69. *Es sei die Ebene* E *der Figur durch ihre beiden Spuren* s', s'' *gegeben und die Umlegung* $A_0B_0C_0D_0$ *eines in ihr gelegenen Vierecks* $ABCD$ *in die* Π_1; *es sollen die beiden Projectionen desselben construirt werden.* Es werde angenommen, dass $ABCD$ sich in dem Theile von E oberhalb Π_1 befindet (Fig. 31, Taf. I).

Man construire die Umlegung P_0 eines Punktes P von s'', der ebenfalls oberhalb Π_1 sich befindet; für ihn ist $P_2 \equiv P$, und P_1 liegt auf a. Das Loth aus P_1 auf s' sei P_1P', aus ihm und der zweiten Ordinate P_1P_2 als Katheten construiren wir das rechtwinklige Dreieck und tragen seine Hypotenuse auf jenem Lothe P_1P' nach der Seite von s', wo $A_0B_0C_0D_0$ liegt, als $P'P_0$ auf. Der spitze Winkel des rechtwinkligen Dreiecks, welcher der Kathete P_1P' anliegt, ist *der Neigungswinkel* α' *von* E *gegen* Π_1*), den wir nachher für die Controllen brauchen werden. Nebenbei bemerken wir, dass in die Gerade s_0'', welche P_0 mit dem Axenschnitte $s's''$ verbindet, sich die zweite Spur s'' umlegt und ihr Winkel mit s' uns *die wahre Grösse des Winkels der beiden Spuren* zeigt.

Man hat nun die entsprechenden Punkte P_0, P_1 und kann zu den Ecken der Umlegung nach der Affinität von Nr. 23, 24 die ersten Projectionen construiren.

Für die andere Affinität fehlt noch die Axe; sie geht durch den Punkt $s's''$. Man lege irgend eine Gerade l in die Ebene E. Der Punkt l_1l_2 ist ein zweiter Punkt von m_{12}, für welche noch ein dritter Punkt n_1n_2 construirt ist. Da nun P_1, P_2 (oder l_1, l_2) bekannt sind, können nach Nr. 67 die entsprechenden Punkte A_2, B_2, C_2, D_2 zu A_1, B_1, C_1, D_1 construirt werden.

70. Es ist aber doch die Bemerkung hieran zu knüpfen, dass die Anwendung der Affinität sich erst lohnt, wenn die Zahl der zu construirenden Punkte nicht zu klein ist, also besonders, wenn für eine Curve eine grössere Zahl von Punkten zu construiren ist. Ferner zeigt es sich bei der praktischen Ausführung, dass in Bezug auf Genauigkeit und bequeme Lage die wiederholte Construction mit den rechtwinkligen Dreiecken, für die man den gemeinsamen Winkel α' kennt, vorzuziehen ist, indem bei der Affinitätsmethode es sehr auf die ersten Punkte ankommt, deren etwaige Ungenauigkeit solche bei allen weiteren nach sich zieht, während bei der anderen Methode die

---

Feldes und der Umlegung in die erste Projectionsebene die *allgemeine* Affinität besteht, welche in der Anmerkung von Nr. 23 erwähnt wurde.

*) Die Umlegung ist um den stumpfen Winkel erfolgt, damit Collisionen vermieden werden.

verschiedenen Punkte mehr von einander unabhängig erhalten werden. Auch stellen sich bei jener häufig schleifende Schnitte ein.

Es ist daher gut, wenn mit den beiden Methoden abgewechselt wird, oder wenn mit der einen Methode construirt, mit der andern controllirt wird, besonders das Schneiden entsprechender Geraden, also auch z. B. entsprechender Tangenten von Curven auf der Affinitätsaxe.

Zu versäumen ist die Controlle keinesfalls.

71. Hinsichtlich der *Umlegung* ist schon in Nr. 29 erwähnt worden, dass *dieselbe oft statt um eine Spur, z. B. s' in Π_1, um eine Spurparallele h' in die durch dieselbe parallel zu Π_1 gehende (der umzulegenden Figur nähere) Ebene Π_1^* geschieht.* Es wird, wie dort gesagt, die congruente Projection der Umlegung construirt. Zwischen dieser und der Projection der Figur selbst findet ebenfalls Affinität statt. An Stelle von s' ist h_1' getreten, und die verkürzten zweiten Ordinaten sind die Entfernungen der zweiten Projectionen von h_2', welche ja die Spur (und Projection) von Π_1^* in Π_2 ist. Liegen die zweiten Projectionen zweier Punkte auf verschiedenen Seiten von h_2', so befinden sich ihre ersten Projectionen auf verschiedenen Seiten von h_1'.

72. Die Umlegung, resp. Aufrichtung kann man auch *mit Hilfe von Spurparallelen* (siehe später Fig. 50 bei Nr. 106) vollziehen. Sei h' irgend eine erste Spurparallele, also h_1' parallel s'; diese treffe a in Q_1; $Q_2 \equiv Q$ liegt auf s'' und auf h_2', welche parallel a ist; Q_0 liegt auf der oben construirten Umlegung s_0'' von s'' ebenso weit von $s's''$ (und natürlich auf der richtigen Seite) wie $Q_2 \equiv Q$; durch ihn geht h_0' parallel s'. Ist also z. B. A_0 aufzurichten, so ziehe man durch ihn h_0' parallel s', erhält Q_0, Q_2, Q_1; durch Q_2 geht h_2' parallel zu a, durch Q_1 aber h_1' parallel zu s'. Die Senkrechte aus A_0 auf s' markirt auf h_1' den Punkt A_1, der nach h_2' als A_2 gelothet wird. Umgekehrt erhält man aus A_1 die Punkte A_0 und A_2.

Dritter Abschnitt.

Weitere Aufgaben.

73. Unsere früheren Betrachtungen über die Mannigfaltigkeiten der Grundelemente müssen wir nunmehr vervollständigen. In Nr. 12 hatten wir Gelegenheit, uns klar zu machen, dass auf einer Gerade ∞^1 Punkte liegen, in einer Ebene ∞^2 Geraden. Verschieben wir die Gerade parallel zu sich in einer Ebene, so erhalten wir alle Punkte derselben, ∞^1 Punktreihen mit je ∞^1 Punkten, also ∞^2 *Punkte in der*

Ebene; und verschieben wir dann die Ebene parallel durch die ∞^1 möglichen Lagen, die sie dabei einnehmen kann, so erhalten wir alle Punkte des Raumes, also ∞^3; denn jeder liegt in einer von diesen parallelen Ebenen. Wir erkannten weiter in Nr. 40, dass ein Bündel ∞^2 Strahlen und ∞^2 Ebenen enthält; wir können uns diese Elemente als die projicirenden Elemente der ∞^2 Punkte und ∞^2 Geraden einer Ebene (einschliesslich der unendlich fernen Elemente derselben) denken und aus dieser ausnahmslos eindeutigen Beziehung zwischen Bündel und Feld die gleichen Mannigfaltigkeiten in beiden erkennen.

Legen wir zu jeder Ebene des Bündels die ∞^1 parallelen Ebenen, so kommen wir zu allen Ebenen des Raums, und es sind deren ∞^3; so dass die Mannigfaltigkeit der Ebenen die nämliche, wie die der Punkte.

Zu jedem der Strahlen des Bündels aber kann man ∞^2 parallele Strahlen ziehen, nämlich durch jeden der ∞^2 Punkte einer den Strahl schneidenden Ebene einen; so erhalten wir alle Strahlen des Raums, und es giebt deren ∞^4. Daher haben wir:

Es giebt im Raume ∞^3 Punkte, ∞^3 Ebenen, aber ∞^4 Geraden.

74. Eine Bedingung heisst für eins dieser Grundelemente eine i-fache, wenn von den ∞^k überhaupt vorhandenen Grundelementen ($k = 3$ bei Punkten, Ebenen, $k = 4$ bei Geraden) ∞^{k-i} ihr genügen; mehreren Bedingungen, deren Vielfachensumme Σi gleich k ist, wird durch eine endliche Anzahl genügt; ist sie kleiner als k, dann wird durch $\infty^{k-\Sigma i}$ Elemente genügt; ist sie grösser als k, so kann den Bedingungen im allgemeinen nicht genügt werden.

Für einen Punkt ist das Liegen in einer gegebenen Ebene eine einfache, das Liegen auf einer gegebenen Gerade eine zweifache Bedingung; da von den ∞^3 Punkten des Raumes ∞^2 in jener, ∞^1 auf dieser liegen. Wir können dem Punkte auferlegen, in drei gegebenen Ebenen zu liegen, oder auf einer gegebenen Ebene und einer gegebenen Gerade. In beiden Fällen genügt *ein* Punkt. In zwei gegebenen Ebenen liegen ∞^1 Punkte.

In gleicher Weise ist für eine Ebene das Hindurchgehen durch einen gegebenen Punkt eine einfache, das durch eine gegebene Gerade eine zweifache Bedingung; denn von den ∞^3 Ebenen des Raumes gehen durch jenen ∞^2, durch diese ∞^1. Wir haben *eine* Ebene durch 3 Punkte, durch einen Punkt und eine Gerade, ∞^1 durch 2 Punkte.

Bei der Gerade haben wir wegen der grösseren Mannigfaltigkeit 4 eine grössere Reichhaltigkeit. Durch einen Punkt gehen ∞^2 Geraden, ebenso viele liegen in einer Ebene; *also sind für die Gerade die Bedingungen, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, in einer gegebenen Ebene zu liegen, doppelte.*

Weil in jeder der ∞^1 Ebenen, welche durch eine gegebene Gerade gehen, ∞^2 Geraden liegen, so giebt es ∞^3 Geraden, welche mit ihr in einer Ebene liegen oder (nach der perspectiven Ansicht) sie schneiden. *Es ist daher für eine Gerade eine einfache Bedingung, eine gegebene Gerade zu schneiden.* Wir haben eine endliche Anzahl von Geraden, welche zwei doppelte Bedingungen erfüllen: durch zwei gegebene Punkte zu gehen, oder in zwei gegebenen Ebenen zu liegen, oder zwei einfache und eine doppelte Bedingung erfüllen: zwei gegebene Geraden zu treffen und durch einen gegebenen Punkt zu gehen oder in einer gegebenen Ebene zu liegen. In allen vier Fällen giebt es *eine* Gerade, die den Bedingungen genügt. Wir werden diese und die obigen eindeutigen Aufgaben, soweit sie nicht zu einfach oder schon behandelt sind, sowie Specialfälle von ihnen nun noch constructiv erledigen. Die Zahl der Geraden, welche drei gegebene Geraden treffen, ist ∞^1, ebenso die derjenigen, welche eine gegebene Gerade treffen und durch einen gegebenen Punkt gehen oder in einer gegebenen Ebene liegen. Es giebt ∞^2 Geraden, welche zwei gegebene Geraden treffen, und eine endliche Zahl von Geraden, welche vier gegebene Geraden treffen. Aber die Behandlung dieser nicht mehr eindeutigen Aufgabe*) gehört nicht in diese Elemente.

75. a) *Durch eine Gerade g die Ebene zu legen, welche mit einer (zu g nicht parallelen) Gerade l parallel ist.*

Man ziehe durch einen Punkt von g die Parallele m zu l; m und g bestimmen die verlangte Ebene.

Man erspart sich in der einen Projectionsebene das Parallelziehen, wenn man z. B. $m_1 \equiv l_1$ nimmt; d. h. man verschiebt l parallel in ihrer ersten projicirenden Ebene, bis sie (als m) die g schneidet.

b) Legt man auch durch l die zu g parallele Ebene, so ist die Aufgabe gelöst: *durch zwei windschiefe Geraden die beiden zu einander parallelen Ebenen zu legen.*

c) *Durch einen Punkt P die Ebene zu legen, welche zwei gegebenen Geraden g und l parallel ist.*

Die Parallelen durch P zu g und l bestimmen die verlangte Ebene.

Die Spuren der Ebene sind, wenn man sie wünscht, nach Nr. 60 zu construiren.

Die Aufgaben a), c) sind nach Nr. 36 specielle Fälle der Aufgaben: Durch eine Gerade und einen Punkt (ausserhalb), bez. durch drei Punkte (die nicht in gerader Linie liegen) die Ebene zu legen,

*) J. Steiner's Gesammelte Werke Bd. I, S. 147 und 402.



haben deshalb wie diese Aufgaben nur eine Lösung und werden ebenso gelöst wie sie.

76. a) *Durch einen Punkt P die Gerade zu ziehen, welche zwei windschiefe Geraden g und l trifft.*

Die verlangte Gerade ist die Schnittlinie (Nr. 64) der beiden Ebenen Pg und Pl, oder verbindet P mit dem Schnittpunkte von Pg und l (oder Pl und g) (Nr. 63) und wird auch so construirt und zwar auf die letztere Weise einfacher. Bei der ersteren Construction hat man als Controlle das Schneiden der construirten Gerade mit g und l (Nr. 54), bei der andern nur das mit g (oder l).

b) *Parallel zu einer Gerade r die Gerade zu ziehen, welche die windschiefen Geraden g und l trifft.*

Die verlangte Gerade ist die Schnittlinie der Ebenen, welche bezw. durch g und l parallel zu r gehen und nach Nr. 75a) construirt werden, oder die Parallele zu r durch den Punkt, in dem die eine dieser Ebenen die andere gegebene Gerade trifft. Die Ebene durch g, welche zu r parallel ist, enthält von den ∞^2 Geraden von der Richtung r diejenigen, welche g treffen.

Diese Aufgabe ist, nach der perspectiven Ansicht, ein besonderer Fall von a), wird ebenso gelöst und hat dieselbe Controlle.

Eine interessante Anwendung von ihr ist folgende: *Vom Anfangspunkte nach dem Endpunkte einer gegebenen Strecke eine zweimal gebrochene Linie zu ziehen, deren drei Theile bezw. zu drei gegebenen Geraden parallel sind.* Nachdem die erste und dritte Parallele gezogen sind, ist die mittlere nach unserer Aufgabe zu construiren. Diese Aufgabe ist nothwendig für die constructive Zerlegung einer Kraft in drei Componenten, deren Wirkungslinien mit der ihrigen in einen Punkt zusammenlaufen (Nr. 54).

c) *Die Gerade zu construiren, welche in der Ebene E liegt und die windschiefen Geraden g und l schneidet.*

Man construirt die Schnitte von g und l mit E und verbindet sie.

d) *Den Schnittpunkt dreier gegebenen Ebenen zu finden.*

Man sucht die Schnittlinien von zweimal je zweien der Ebenen, hat eine Controlle in dem Schneiden derselben, sodann aber auch darin, dass die dritte Schnittlinie auch durch diesen Punkt, den gesuchten, gehen muss; oder einfacher, man sucht den Schnittpunkt der Schnittlinie zweier der Ebenen mit der dritten; dass jede der beiden andern Schnittlinien durch ihn geht, ist Controlle.

77. *Eine Ebene E ist gegeben; durch eine gegebene Gerade g die Ebene Φ zu legen, welche auf E senkrecht ist.*

Man legt durch einen Punkt von g das Loth p auf E (Nr. 61); g und p bestimmen Φ. Ob g ausserhalb E oder in E liegt, ist gleichgültig.

Nach Nr. 37 ist diese Aufgabe specieller Fall der Aufgabe (Nr. 60): Durch eine Gerade und einen (ihr nicht angehörigen) Punkt die Ebene zu legen, — der Punkt ist der unendlich ferne in senkrechter Richtung zu E — und wird wie diese gelöst; es wird auch hier eine Gerade durch diesen Punkt, welche g schneidet, construirt, also eine Senkrechte zu E.

78. *Zu einer gegebenen Ebene* E *durch einen gegebenen Punkt P die Parallelebene Φ zu legen.*

Diese Aufgabe ist gleichfalls Specialfall der eben genannten Aufgabe; nur ist diesmal die *Gerade* eine uneigentliche, die unendlich ferne Gerade von E. Ist E durch zwei Geraden gegeben, so bestimmen die Parallelen zu ihnen durch P die Ebene Φ. Ist aber E durch ihre Spuren gegeben, so sind die von Φ ihnen parallel; hat man daher für eine von ihnen einen Punkt, so hat man beide. Steht E und dann auch Φ auf Π_1 senkrecht, so geht die erste Spur von Φ durch P_1.

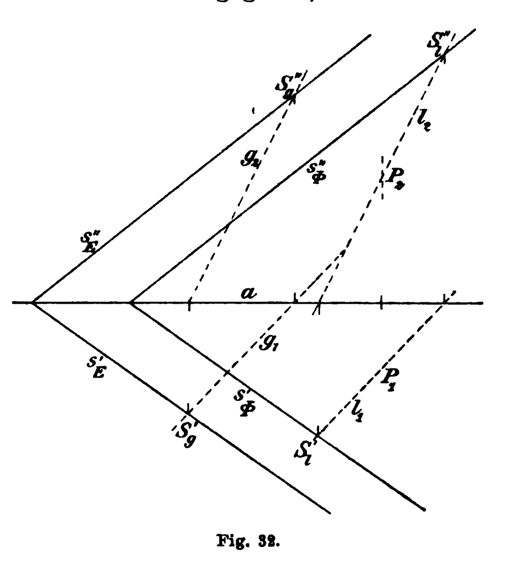


Fig. 32.

Ist aber E eine beliebige Ebene (Fig. 32), so lege man in sie eine Gerade g und durch P die Parallele l zu ihr, die in Φ liegen muss; ihre Spuren sind Punkte der Spuren von Φ; man kann daher diese zeichnen und hat im Treffen auf der Axe eine Controlle. Die Construction vereinfacht sich, wenn man als g eine Spur von E nimmt; die l ist dann eine gleichnamige Spurparallele in Φ; aber die Controlle fällt weg.

79. *Durch einen Punkt P die Ebene zu legen, welche auf einer gegebenen Gerade g normal ist.*

Auch diese Aufgabe subsumirt sich derselben Aufgabe; die gegebene Gerade, durch welche die Ebene gehen soll, ist die gemeinsame unendlich ferne Gerade der auf g senkrechten Ebenen. Man lege zunächst eine beliebige Ebene E, die senkrecht zu g ist: ihre Spuren

treffen sich auf a und sind bezw. normal zu g_1 und g_2 (Nr. 59); durch P führt man dann die Parallelebene E zu Φ. Oder: Man ziehe durch P die Spurparallele h', h'' der verlangten Ebene, also durch P_1 h_1' normal zu g_1, h_1'' parallel zu a, durch P_2 h_2' parallel zu a, h_2'' normal zu g_2. Durch h', h'' ist E bestimmt; die endlichen Spuren dieser Geraden und der Parallelismus von s' mit h_1' und von s'' mit h_2'' liefern s', s'' von E, wenn man sie haben will.

Ist F der Schnittpunkt von E mit g, so ist PF das Loth aus P auf g und man hat die Lösung der Aufgabe: *Aus einem Punkte P auf eine Gerade g das Loth zu fällen.* Als Specialfall der Aufgabe: Durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche eine Gerade g unter einem gegebenen Winkel schneidet, wird sie später (Nr. 86) noch eine andere Lösung finden.

Ist g zu der einen Projectionsebene parallel, so vereinfacht sich unsere jetzige Aufgabe wesentlich (Nr. 31 c).

80. *Die Entfernung zweier parallelen Ebenen E, Φ, die durch ihre Spuren gegeben sind, zu finden.*

Aus dem Axenschnitt der einen Φ fälle man das Loth auf s'_{E} und errichte in ihm das Loth auf a bis zum Schnitte mit s''_{E}; die Hypotenusenhöhe des rechtwinkligen Dreiecks, das diese Lothe zu Katheten hat, ist die Entfernung; denn die beiden Lothe sind senkrecht zu s'_{E}, also ist ihre Ebene senkrecht zu s'_{E} und zu E und daher auch jene Höhe senkrecht zu E.

81. *Die Gerade, welche zu zwei windschiefen Geraden g und l rechtwinklig ist und beide schneidet, zu construiren.*

Diese Aufgabe ist ein Specialfall von Nr. 76 b); denn alle ∞^2 Geraden, welche zu g und l rechtwinklig sind (Nr. 17), haben eine gegebene Richtung r, da sie auf den ∞^1 parallelen Ebenen, die zu g und l parallel sind, senkrecht stehen; und umgekehrt jede Gerade, die dies thut, ist zu g und l rechtwinklig. Wir construiren (Fig. 33) die durch g gehende von jenen Ebenen, nach Nr. 75 a); sie sei $\mathsf{E} = gm$, und in ihr Spurparallelen h', h'' von beiden Arten. Die Geraden der Richtung r haben dann ihre Projectionen senkrecht bezw. zu h_1', h_2''. Um die durch g gehende zur Richtung r parallele Ebene zu haben, durch deren Schnitt mit l nach Nr. 76 b) die gesuchte Gerade geht, zieht man durch einen Punkt P von g das Loth n zu E. Die zu E senkrechte Ebene $\Phi = gn$ enthält dann alle ∞^1 zu g und l rechtwinkligen Geraden, welche g schneiden. Man ermittelt nun nach Nr. 63, mit Hilfe einer in Φ gelegenen Gerade q, die mit l eine Projection gemeinsam hat ($q_2 = l_2$), den Schnittpunkt $F = \Phi l$ und führt durch ihn die Parallele p zu n oder, was dasselbe ist, die Senkrechte zu E. Das

ist die verlangte Gerade. Sie fällt in Φ und muss g (in N) schneiden, was Controlle ist.

Die wahre Länge von FN wird nach Nr. 44 ermittelt. Sie ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten von g und l. In der

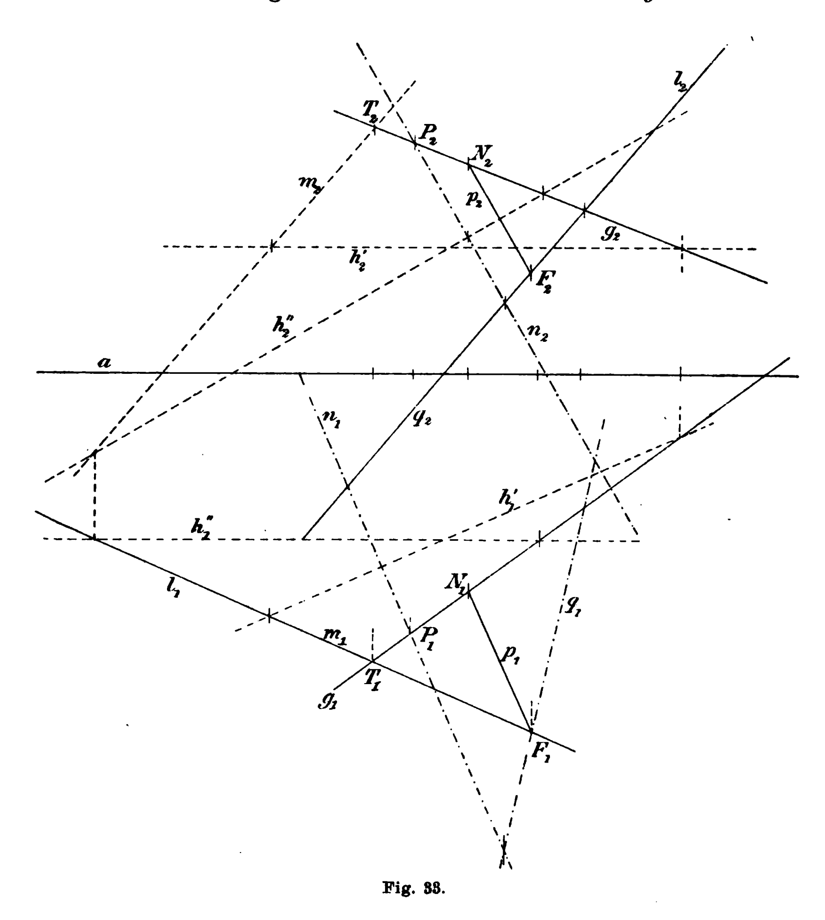


Fig. 33.

That, wenn X ein beliebiger Punkt von g, Y einer von l und Z die Orthogonalprojection von Y auf E ist, so ist $YZ = FN$, weil FY oder l zu E parallel ist; wegen des rechten Winkels XZY ist $XY > YZ$ oder FN.

Die Construction von p und FN vereinfacht sich erheblich, wenn g und l beide zu der einen Projectionsebene parallel sind (Nr. 32).

82. In den folgenden Aufgaben werden *Winkel* als gegebene oder gesuchte Stücke vorkommen.

Die Aufgabe, den Neigungswinkel einer Gerade g gegen eine der Projectionsebenen zu bestimmen, ist schon in Nr. 44 erledigt.

Die in Nr. 69 gelehrte Construction des Neigungswinkels α' einer Ebene E gegen eine Projectionsebene, z. B. Π_1, nehmen wir aus der dortigen complicirtern Figur heraus. Man trägt (Fig. 34) am besten die Kathete $P_1 P'$ von P_1 auf der Axe auf bis P_0''; so dass $P_2 P_0'' P_1$ der Winkel α' ist. Das Dreieck $P_2 P_1 P_0''$ ist das rechtwinklige Dreieck in der Neigungswinkel-Ebene, um $P_2 P_1$, die zweite Spur dieser Ebene, in Π_2 umgelegt. Die Umlegung $P_1 P' P_0'$ um die erste Spur $P_1 P'$ erfordert die Construction eines neuen rechten Winkels; es ist

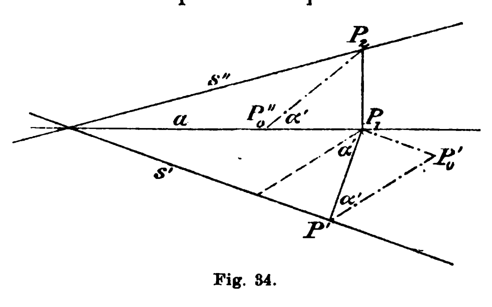


Fig. 34.

dann $P_1 P' P_0' = \alpha'$; verzichtet man auf die richtige Lage der Umlegung, so kann man den schon vorhandenen rechten Winkel bei P' benutzen.

Nähert sich s' der Normalität zur Axe, so nähert sich das Loth aus P_1 auf s' der Axe selbst und man sieht, wie, wenn die Normalität eingetreten ist, also E auf Π_2 senkrecht steht, der Winkel (s'', a) der Neigungswinkel $\alpha' = (\mathsf{E}, \Pi_1)$ geworden ist (Nr. 57).

Statt der Spur s' kann man sich wieder einer ersten Spurparallele h' bedienen, indem ja E mit jeder Parallelebene zu Π_1 denselben Winkel bildet, wie mit Π_1 selbst. Es sei P dann ein beliebiger Punkt der Ebene, so wird man aus den Lothen aus P_1 auf h_1' und aus P_2 auf h_2' als Katheten das rechtwinklige Dreieck construiren, in dem dann wieder der Gegenwinkel der letzteren der $\sphericalangle$ α' ist.

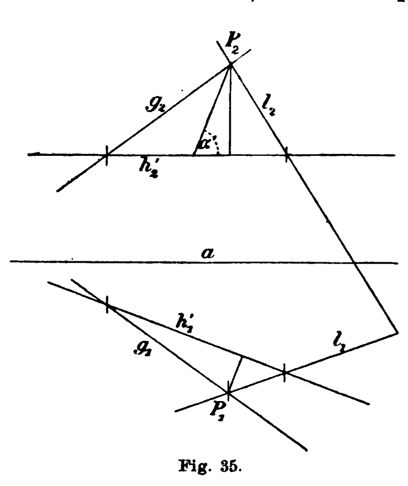


Fig. 35.

Dies empfiehlt sich besonders, wenn E durch zwei sich schneidende Geraden oder durch eine Figur bestimmt ist und die Spur s' eine unbequeme Lage hat. Den Punkt P legt man dann offenbar auf eine der beiden Geraden oder auf den Umfang der Figur. (Fig. 35).

Die Lösung der Aufgabe: *Die Spur s' und der Neigungswinkel α' (gegen Π_1) einer Ebene* E *ist gegeben; die zweite Spur s'' zu finden,* ist mit dem Vorhergehenden gegeben; es sind stets zwei Ebenen möglich (Nr. 24).

Wenn E *der Projectionsaxe parallel ist,* so giebt das rechtwinklige

Dreieck, welches die Entfernungen der Spuren s' und s'' von a zu Katheten hat und durch den Schnitt einer zu a, s', s'' normalen Ebene mit Π_1, Π_2, E entsteht, zugleich $\alpha' = (E, \Pi_1)$ und $\alpha'' = (E, \Pi_2)$.

83. *Die wahre Grösse des Winkels zweier Geraden g und l zu finden.*

Wir setzen voraus, dass g und l sich (in P) schneiden; denn im andern Falle können wir sie, ohne den Winkel zu ändern (Nr. 17), durch Parallelverschiebung der einen (Nr. 75) zum Schnitte bringen (Fig. 36). Von der Ebene, welche sie bestimmen, construirt man eine

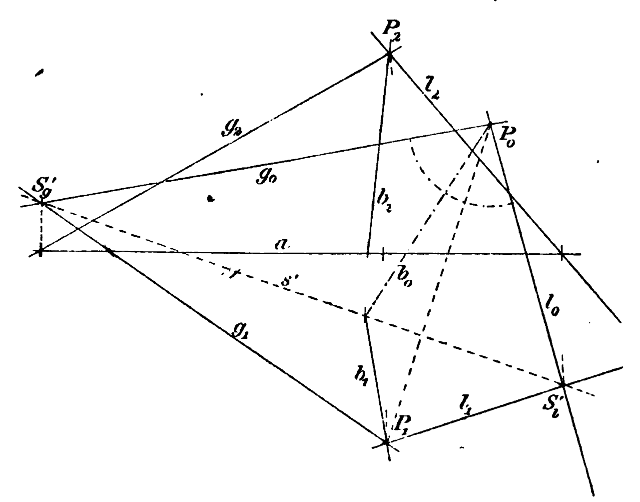


Fig. 36.

Spur s' oder bei unbequemer Lage eine Spurparallele h' und legt sie um s' oder h' in Π_1, bezw. die Parallelebene durch h' zu Π_1 um. Beim Umlegen bleiben die beiden ersten Spuren von g und l, bezw. ihre Begegnungspunkte mit h' (also in der Projection die Punkte $g_1 h_1'$ und $l_1 h_1'$) fest und man hat nur noch die Umlegung P_0 des Schnittpunktes P zu ermitteln, welche dann mit diesen festen Punkten durch g_0 und l_0 verbunden wird.

Ist etwa l parallel zu Π_1 (also $l_2 \parallel a$), so ist $l_1 \parallel s' \parallel h_1'$ und auch $l_0 \parallel s' \parallel h_1'$ (Nr. 21); l ist dann selbst eine erste Spurparallele in der Ebene gl.

Hat man es freilich mit dem Winkel zu thun, der von zwei bestimmten unter den vier Halbstrahlen, die durch P auf g und l entstehen, gebildet wird, so muss man sich überzeugen, ob diese Schenkel beide jene fest bleibenden Punkte enthalten; andernfalls erhält man durch die Umlegung den Neben- oder den Scheitelwinkel des gesuchten Winkels.

Jede *Theilung*, die bei einem Winkel überhaupt möglich ist, kann nun auch bei einem durch seine Projectionen dargestellten Winkel ausgeführt werden, indem man sie an dem umgelegten vornimmt und jede erhaltene Theilungslinie dann wieder aufrichtet, wobei ihr Begegnungspunkt mit der Gerade (s' oder h'), um welche umgelegt ist, fest bleibt, d. h. gleichzeitig Umlegung und erste Projection ist, während die zweite Projection auf a, bezw. h_2' liegt. In Fig. 36 ist der Winkel (g, l) durch b halbirt.

84. *Den Neigungswinkel einer Gerade g gegen eine Ebene* E *zu construiren.*

a) Man führt durch g die Ebene Φ normal zu E (Nr. 77), construirt die Schnittlinie $k = \Phi\mathsf{E}$ (Nr. 64, 65) und sucht durch Umlegung den spitzen Winkel (g, k) nach Nr. 83. Oder einfacher:

b) Man fällt aus irgend einem Punkte von g auf E das Loth p (Nr. 61), sucht den spitzen Winkel (g, p) durch Umlegung und erhält dadurch den Complementwinkel des gesuchten Winkels (Nr. 18).

Wenn die Winkel einer und derselben Gerade g mit verschiedenen Ebenen gefunden werden sollen, — z. B. die Winkel eines Lichtstrahls (bei parallelem Lichte) mit den verschiedenen Seitenflächen eines Polyeders, um die Beleuchtung dieser Flächen zu bestimmen, welche dem Sinus des Winkels proportional ist, — so wird man, bei Anwendung der im allgemeinen vorzuziehenden Construction b), die Lothe p durchweg aus demselben Punkte P von g fällen. Werden die verschiedenen Ebenen (g, p) nach Π_1 umgelegt, so kommen die Umlegungen von P alle auf den Kreis zu liegen, welcher die Spur S_g' zum Mittelpunkte und die wahre Länge von $S_g'P$ zum Radius hat; nach der ersten Umlegung von P hat man diese, kann den Kreis schlagen, welcher die weiteren Umlegungsconstructionen abkürzt. Ja, wenn man die g so gezogen hat, dass sie die Axe trifft und vereinigte Spuren hat, so kann man denselben Kreis benutzen, mag man die Umlegungen nach Π_1 oder Π_2 vornehmen; ein solcher Wechsel ist, wenn die andere Projectionsebene zu günstigeren Lagen führt, oft erwünscht.

Um die Umlegung P_0, in Π_1, zu finden, muss man aus P_1 das Loth auf die erste Spur der Ebene gp ziehen; die beiden Schenkel des so erhaltenen rechten Winkels gehen durch die festen Punkte P_1 und S_g', folglich liegt der Fusspunkt des Lothes auf dem Kreise über P_1S_g' als Durchmesser. Man wird bald erkennen, dass dieser Kreis die Construction der Lothe erleichtert.

85. *Den Neigungswinkel zweier Ebenen* E *und* Φ *zu finden.*

a) Man sucht die Schnittlinie $k = \mathsf{E}\Phi$, errichtet auf ihr irgend

eine senkrechte Ebene Δ (Nr. 79), sucht die Schnittlinien ΔΕ und ΔΦ und durch Umlegung deren Winkel. Oder einfacher:

b) Man fällt aus irgend einem Punkt die Lothe p und q auf die beiden Ebenen und sucht durch Umlegung die wahre Grösse des spitzen ∢ (p, q), denn derselbe ist nach Nr. 18 dem spitzen ∢ (Ε, Φ) gleich.

86. Die in Nr. 79 erwähnte Aufgabe: *Durch einen Punkt P nach einer Gerade g unter gegebenem Winkel γ eine Gerade zu ziehen* (Fig. 37, Taf. II), wird einfach durch Umlegung der Ebene Pg und nachherige Wiederaufrichtung der in der Umlegung durch P_0 nach g_0 unter γ gezogenen

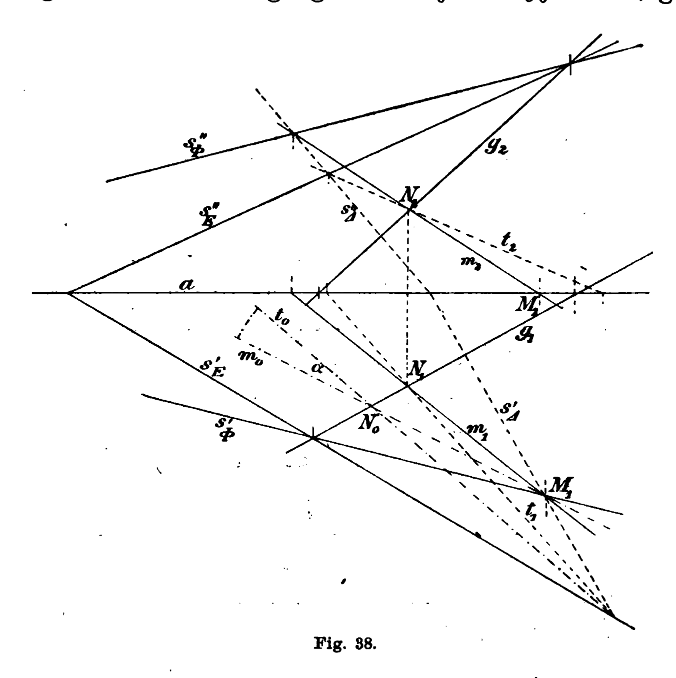


Fig. 38.

Gerade t_0 gelöst, wobei natürlich (und so immer) die festen Punkte, wenn sie auf dem Zeichenblatte vorhanden sind, benutzt werden. Sind sie nicht vorhanden, so ist irgend ein Punkt der gewonnenen Gerade in der Umlegung in der früher beschriebenen Weise aufzurichten; am einfachsten ist der dem Punkte $T_0 = g_0 t_0$ entsprechende $T_1 = g_1 t_1$ zu finden, indem ja die Verbindungslinie normal zur ersten Spur von Pg sein muss.

Die Aufgabe hat zwei Lösungen (t und v), wenn $0^0 < \gamma < 90^0$.

87. *Eine Ebene Ε ist gegeben und in ihr eine Gerade g; es soll durch letztere eine Ebene Φ gelegt werden, welche mit Ε den Winkel α bildet* (Fig. 38).

Jede Ebene, welche zu g normal ist, wird in E un Φ die Schenkel des Neigungswinkels einschneiden. Man construire also eine solche Ebene Δ, d. h. ziehe aus irgend einem Punkte der Projectionsaxe s'_Δ normal zu g_1, s''_Δ normal zu g_2, ermittele die Schnittlinie $t = \Delta E$ und den auf ihr befindlichen Punkt $N = g\Delta$, lege die Ebene Δ um s'_Δ in Π_1 um und construire t_0 und N_0 (letzterer muss auf g_1 fallen). In N_0 lege man an t_0 den Winkel α an; sei m_0 der zweite Schenkel, so ist derselbe die umgelegte Linie $\Delta\Phi$; er werde aufgerichtet; trifft m_0 die s'_Δ in $M_1 \equiv M_0$, so liegt M_2 auf a und $N_1 M_1$ ist m_1, $N_2 M_2$ ist m_2. Die verlangte Ebene Φ ist durch g und m bestimmt und können, wenn nothwendig, ihre Spuren nach Nr. 60 gefunden werden, was in der Figur geschehen ist.

Da die Winkelantragung, ausser wenn $\alpha = 90^0$ ist, auf zwei Weisen geschehen kann, so hat die Aufgabe zwei Lösungen (die Figur enthält blos eine). Ist $\alpha = 90^0$, so erfolgt die Lösung einfacher nach Nr. 77.

88. Jede Gerade in E liefert also zwei Ebenen Φ, welche mit E den Winkel α bilden; folglich giebt es im Ganzen ∞^2; und mit einer Normale auf E bilden sie auch einen festen Winkel, das Complement von α. *Daher ist es für eine Ebene eine einfache Bedingung, mit einer gegebenen Ebene oder mit einer gegebenen Gerade einen gegebenen Winkel zu bilden*; durch einen Punkt gehen also ∞^1 solche Ebenen, durch eine Gerade eine endliche Zahl.

Durch einen Punkt von E gehen ∞^1 Strahlen, welche mit dem in ihm auf E errichteten Lothe p einen gegebenen Winkel und daher auch mit E selbst einen festen Winkel, das Complement des ersteren, bilden; folglich haben wir insgesammt ∞^3 *Strahlen, welche mit* E (*oder* p) *einen gegebenen Winkel bilden, und das ist für einen Strahl ebenfalls eine einfache Bedingung*; ∞^1 von ihnen erfüllen noch die doppelte Bedingung, durch einen gegebenen Punkt zu gehen.

Alle diese ∞^1 Strahlen durch einen Punkt P, welche E unter dem Winkel α und daher das aus P auf E gefällte Loth PF unter dem Winkel $90^0 - \alpha$ schneiden, bilden ersichtlich einen geraden Kreis- oder Rotationskegel, dessen Axe PF ist und welcher über dem Kreise in E um F mit dem Radius $PF \cdot \cot g\, \alpha$ steht; denn in dieser Entfernung von F liegen alle ihre Schnitte S mit E. Jede der Kanten PS projicirt sich (orthogonal) auf E in den Radius FS und ist demnach in der Berührungsebene des Kegels, welche die Tangente in S an den Kreis mit P verbindet, Spurnormale gegen E. Also haben die Berührungsebenen des Kegels gegen E und PF dieselben Neigungen α und $90^0 - \alpha$ wie die Kanten. Umgekehrt, in jeder durch P gehenden

Ebene, welche gegen E unter dem Winkel α geneigt ist, ziehen wir durch P die Spurnormale PS gegen E, welche also auch diese Neigung hat, sodass sie dem eben besprochenen Rotationskegel angehört und S dem Grundkreise. Die Spur der Ebene in E steht daher senkrecht in S auf der Projection FS dieser Spurnormale und ist Tangente des Kreises in S, die Ebene Berührungsebene des Kegels längs PS. Daher:

Die ∞^1 Geraden und Ebenen durch P, welche gegen die Ebene E *unter dem gegebenen Winkel α geneigt sind, sind Kanten und Berührungsebenen eines und desselben Rotationskegels, der über dem Kreise in* E *steht, welcher um F mit dem Radius PF cotg α geschlagen ist, wo PF das Loth aus P auf* E *ist.*

89. *Die Aufgabe in* Nr. 87 *soll für den Fall gelöst werden, dass g ausserhalb* E *liegt* (Fig. 39).

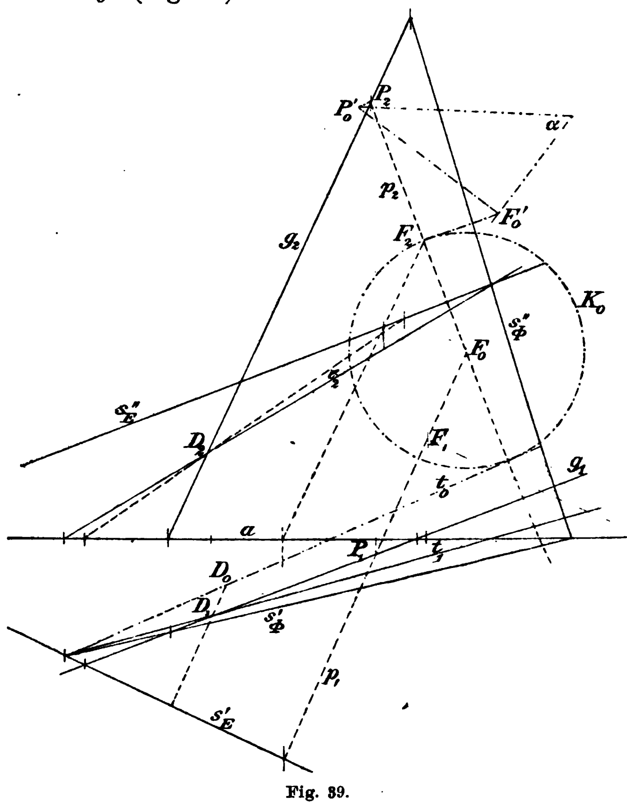


Fig. 39.

Es sei P ein beliebig auf g gewählter Punkt; so fälle man aus ihm das Loth p auf E, suche dessen Fusspunkt F und ermittele die wahre Länge $P_0'F_0'$ von PF; man construire ferner den Schnittpunkt

$D = g\mathsf{E}$, lege die Ebene E um ihre erste Spur s'_{E} um und ermittele die Umlegungen F_0 und D_0 von F und D. In der Umlegung wird der Kreis K_0 um F_0 mit dem Radius $PF \cdot \operatorname{cotg} \alpha$ geschlagen. Führt man dann von D_0 die Tangenten an ihn, so sind dies die umgelegten E-Spuren derjenigen mit E den Winkel α bildenden Ebenen, welche nicht blos durch P, sondern durch g gehen, also der verlangten Ebenen. Jede dieser E-Spuren (in der Figur ist blos eine t_0 gezogen) richtet man auf, wobei man event. D und den Punkt $t_0 s'_{\mathsf{E}}$ benutzt, welcher letztere fest bleibt. Mit jeder dieser Spuren bestimmt g eine der verlangten Ebenen.

Die Entfernung $DF = D_0F_0$ ist gleich $PF \cdot \operatorname{cotg} \beta$, wenn $\beta = \sphericalangle (g, \mathsf{E})$ ist. Es werden mithin zwei oder eine oder keine Tangente von D_0 an K_0, also zwei Ebenen, oder eine, oder keine möglich sein, je nachdem $PF \cdot \operatorname{cotg} \beta >$ oder $=$ oder $< PF \operatorname{cotg} \alpha$, folglich je nachdem $\alpha >$ oder $=$ oder $< \beta$ ist (Nr. 16). Ist $\alpha = 90^0$, so ist $PF . \operatorname{cotg} \alpha = 0$, also reducirt sich der Kreis auf den Punkt F; die Tangenten vereinigen sich stets in die Linie DF; mithin giebt es nur eine Lösung.

Die Aufgabe wird dann freilich nach Nr. 77 einfacher gelöst.

In der Aufgabe von Nr. 87 war $\beta = 0^0$; also fällt der dritte Fall, wo keine Lösung sich ergiebt, fort.

Wenn die Aufgabe gestellt ist: Durch g die Ebene zu legen, welche mit E den kleinsten Winkel (β) bildet, in der also g Spurnormale gegen E ist, so ist deren E-Spur offenbar die Senkrechte durch D zu DF; der Kreis K geht in diesem Fall durch D.

90. *Es sind zwei Ebenen* E *und* Φ *gegeben und in* Φ *ein Punkt* P*; durch denselben soll in* Φ *eine Gerade gezogen werden, welche mit* E *den Winkel* β *bildet* (Fig. 40).

Man construire die Schnittlinie $k = \mathsf{E}\Phi$, fälle aus P auf E das Loth, construire dessen Fusspunkt F und wahre Länge PF, lege E um (um s'_{E}), schlage um F_0 mit dem Radius $PF \cdot \operatorname{cotg} \beta$ den Kreis K_0. Die Punkte, in denen derselbe k_0 trifft, — in der Figur ist nur einer, S_0, benutzt, — sind die umgelegten E-Spuren der verlangten Geraden. Dieselben richtet man mit E wieder auf. Die Aufgabe hat also zwei Lösungen, eine oder keine, je nachdem die Entfernung der Gerade k von F (oder k_0 von F_0) $<$ oder $=$ oder $>$ als PF cotg β ist; mithin, da diese Entfernung gleich $PF \cdot \operatorname{cotg} \alpha$ ist, wo $\alpha = \sphericalangle (\mathsf{E}, \Phi)$, je nachdem $\beta <$ oder $=$ oder $> \alpha$ ist (Nr. 15).

Will man durch P die Gerade in Φ ziehen, welche gegen E die grösste Neigung (α) hat, also Spurnormale gegen E ist, so erhält man als ihre umgelegte E-Spur den Fusspunkt des Lothes aus F_0 auf k_0; der obige Kreis berührt dann die Gerade k_0.

Beide Aufgaben Nr. 89 und 90 vereinfachen sich erheblich, wenn E eine der Projectionsebenen ist.

91. *Es sind zwei windschiefe Geraden g und l gegeben; durch g soll die Ebene gelegt werden, welche mit l den Winkel β bildet.*

Man errichtet auf l irgend eine normale Ebene E und legt nach Nr. 89 durch g die Ebenen, welche gegen E unter dem Winkel $90^0 - \beta$

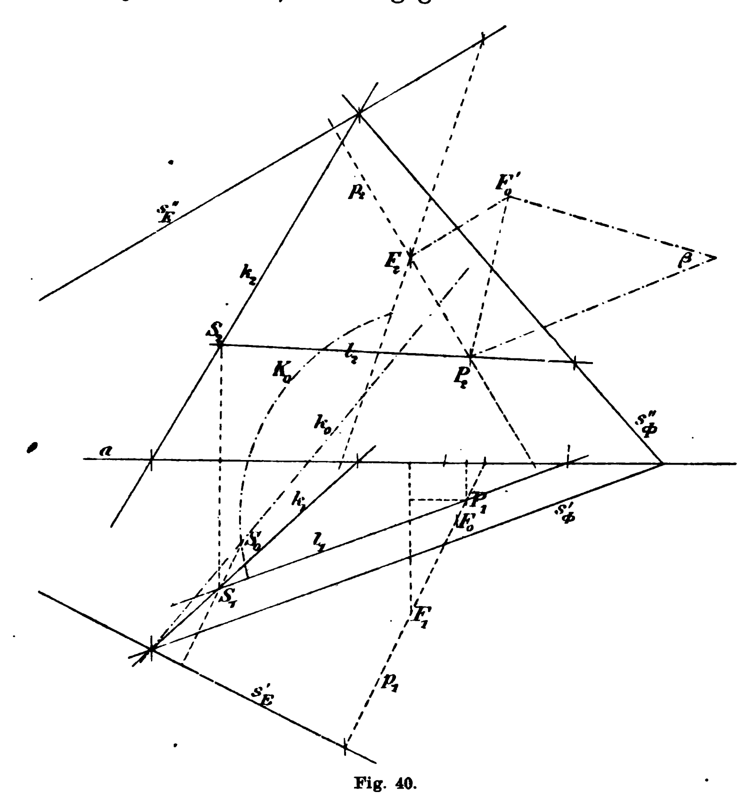


Fig. 40.

geneigt sind. Es giebt zwei Lösungen oder eine oder keine, je nachdem $\beta <$ oder $=$ oder $> \gamma$, wo $\gamma = \sphericalangle (g, l)$ ist (Nr. 19).

Man bekommt die Ebene durch g, welche gegen l den grössten Neigungswinkel, nämlich γ, hat, wenn man die Ebene sucht, welche mit E den $\sphericalangle\, 90^0 - \gamma$ bildet, d. i. den, welchen g mit E bildet.

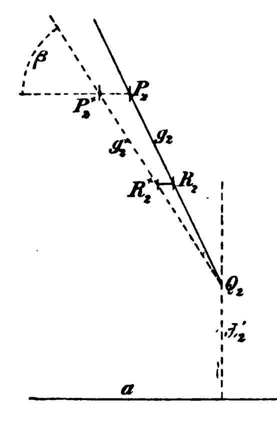
Sie steht auf der durch g zu l parallel geführten Ebene senkrecht und kann also auch durch Nr. 75a) und 77 erhalten werden.

Ebenso führt man die Aufgabe: *In einem Strahlenbüschel* (P, Φ) *die Strahlen zu construiren, welche mit einer gegebenen Gerade l einen gegebenen Winkel bilden*, vermittelst einer zu l normalen Ebene E auf Nr. 90 zurück (Nr. 17).

Vierter Abschnitt.

Drehung der dargestellten Gebilde um Axen.

92. Durch eine Drehung um eine Axe*) kann man räumliche Gebilde sowohl in günstigere Lagen zu der einen oder andern Projectionsebene bringen, oder auch umgekehrt aus solchen Lagen, in denen oft die Projectionen wenig anschaulich sind, — man denke an einen Würfel, von welchem zu jeder der Projectionsebenen zwei Flächen parallel sind und daher je vier Flächen sich geradlinig projiciren — in andere mit anschaulicheren Projectionen versetzen. Wir begnügen uns mit Axen, die zu einer der Projectionsebenen normal sind. Es sei z. B. d' eine im Punkte D_1 auf Π_1 senkrechte Drehaxe.



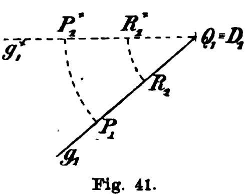


Fig. 41.

Bei der Drehung um d' beschreibt jeder Punkt P des Raumes einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt auf d' liegt und dessen Ebene zu d' normal, also zu Π_1 parallel und auf Π_2 senkrecht ist. Daraus geht hervor, dass *die erste Projection P_1 sich ebenfalls auf einem Kreisbogen um D_1 etwa bis P_1^* bewegt und die zweite auf einer Parallele zur Projectionsaxe bis P_2^*, so dass $P_1^* P_2^*$ normal zu a ist.*

Die Centriwinkel, die zu den von verschiedenen Punkten (und ihren ersten Projectionen) bei derselben Drehung beschriebenen Kreisbögen gehören, haben offenbar gleiche Grösse und Drehrichtung, und werden diese Bögen deshalb, um die gleichen Centriwinkel zu erhalten, am besten auf einen alle umschliessenden concentrischen Kreis übertragen.

93. Man erhält durch diese Drehung ein neues Mittel, *den Neigungswinkel einer Gerade g gegen die Projectionsebene, auf der die Drehaxe senkrecht ist,* also hier Π_1, *zu ermitteln, sowie die wahre Länge einer Strecke PQ, die auf ihr liegt* (Fig. 41).

*) Man mache sich den Unterschied zwischen einer Drehung um eine Axe und um einen Punkt *im Raume* klar; letztere ist unbestimmter und ermöglicht ∞^2 Lagen, erstere nur ∞^1. Von dieser gelangt man zur Drehung um einen Punkt in einer Ebene, wenn man sich auf eine zur Drehaxe senkrechte Ebene beschränkt

Man legt die Drehaxe durch den einen Endpunkt, z. B. Q, so dass $Q_1 \equiv D_1$: dadurch erspart man sich die Drehung von Q. Man bewege nun P_1 auf einem Kreisbogen um Q_1 bis P_1^*, so dass $Q_1P_1^* \parallel a$ ist, also QP^* parallel Π_2; P_2 bewegt sich dabei auf der Parallele zu a bis P_2^*. Offenbar ist nun $Q_2P_2^*$ gleich der wahren Länge QP; ferner ist der Neigungswinkel β von $g = QP$ gegen Π_1, der sich bei der Drehung nicht ändert, in wahrer Grösse durch den Winkel, welchen $Q_2P_2^*$ mit a (oder mit $P_2^*P_2$) bildet (Nr. 47), dargestellt.

Soll auf einer Gerade vom Punkte Q aus nach der einen Seite hin eine Strecke von gegebener Länge aufgetragen werden, so nimmt man

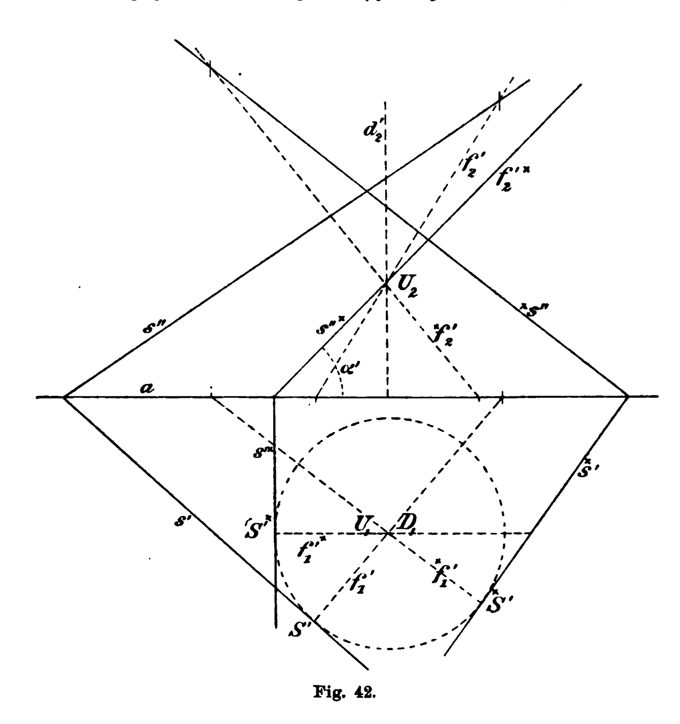


Fig. 42.

erst einen beliebigen Punkt P auf g, dreht QP nach $QP^* = g^*$, wie eben beschrieben, trägt dann auf $Q_2P_2^*$ von Q_2 die gegebene Strecke auf bis R_2^*, erhält durch Lothen auf $Q_1P_1^*$ den Punkt R_1^* und dreht wieder zurück nach R auf g oder gelangt von R_2^* parallel zu a zu R_2 auf g_2 und erhält R_1 durch Lothen.

94. *Wird eine Ebene* E *gedreht* (Fig. 42), so bleibt der Punkt $U = \mathsf{E}d'$ fest, ebenso verändern sich die Neigungen (E, d') und (E, Π_1) nicht; die erste Spur s' bleibt in der Ebene dieselbe Linie, während sie in Π_1 einen Kreis um D_1 umhüllt; derselbe Kreis wird von der

ersten Spur der durch $\mathsf{E}d'$ gehenden ersten Spurnormale von E beschrieben (Nr. 88).

Die zweite Spur s'' verändert sich auch in der Ebene selbst. Um die neue zweite Spur $*s''$ für irgend eine Lage von $*s'$ zu haben, muss man in E eine Gerade g besitzen, welche man dreht; der Centriwinkel, der zu dem von jedem Punkte von g beschriebenen Kreisbogen gehört, ist gleich dem Winkel, welcher von den nach den Berührungspunkten von s' und $*s'$ gezogenen Radien, also von s' und $*s'$ selbst gebildet wird. Am einfachsten gestaltet sich die Construction, wenn g die eben genannte Spurnormale f' ist, denn ihre erste Spur S', bez. $*S'$ ist der Berührungspunkt von s' und $*s'$.

Kommt durch die Drehung s' in senkrechte Lage $s'*$ zur Projectionsaxe a, also E zu Π_2, so ist der Winkel zwischen a und $s''*$ *der Neigungswinkel* (E, Π_1) *in wahrer Grösse* (Nr. 57, 82). Bei dieser Lage ist die eben genannte Spurnormale parallel zu Π_2; da dann $s''*$ ihre zweite Projection ist, so tritt deutlich hervor, dass die Neigungswinkel einer Ebene und ihrer ersten Spurnormalen gegen Π_1 gleich sind.

Der bloss zu diesem Zwecke nothwendige Theil der Figur geht in die Figur 34 über, wenn d' in Π_2 gelegt wird.

95. Da der Neigungswinkel einer Ebene gegen Π_1 bei der Drehung um eine auf Π_1 normale Axe erhalten bleibt, so bleiben z. B. auch alle zu Π_1 parallelen Ebenen parallel und alle zu Π_1 normalen normal. Die Geraden, in welche sich Figuren in solchen Ebenen in Π_2, bez. Π_1 projiciren, gehen noch nicht in ordentliche Figuren über. Es ist daher, um solche zu erzielen, oft nothwendig, *zwei Drehungen hinter einander vorzunehmen*, die eine um eine Axe d' normal auf Π_1, die andere um eine Axe d'' normal auf Π_2. Bei einer Ebene, die zu der einen Projectionsebene parallel ist, entfernt man ihre Normalität zur andern nur dadurch, dass man zuerst um eine zu der letzteren senkrechte Axe dreht, nicht bei der umgekehrten Reihenfolge.

Um *Collision* der Projectionen der ursprünglichen und der gedrehten, bez. wiederholt gedrehten Figur zu vermeiden, legt man entweder den Fusspunkt der Drehaxe ausserhalb der Figur oder, wenn Symmetriegründe einen Punkt innerhalb (z. B. einen etwaigen Mittelpunkt) für geeignet erscheinen lassen, verschiebt man die gedrehte Figur parallel zur Projectionsaxe, wobei man blos nothwendig hat, die sämmtlichen Projectionen um eine gleiche Strecke parallel zu a zu verschieben.

Durch zwei Drehungen um d' und d'' kann man auch umgekehrt

eine Ebene E *parallel zu einer Projectionsebene machen*, also die Projection einer ebenen Figur zur Congruenz mit der Figur selbst bringen. Man dreht die Ebene um d', bis s'^* normal a ist; darauf um d'', bis s''^{**} parallel a ist. Durch die erste Drehung ist die Ebene senkrecht zu Π_2 geworden und bleibt es bei der zweiten, kann also parallel zu Π_1 werden.

Ebenso kann man *eine Gerade* g *zur Normalität auf der einen Projectionsebene bringen*. Dreht man z. B. g zuerst um d', bis sie parallel Π_2 ist, so kann man nun durch eine Drehung um d'' sie senkrecht zu Π_1, d. h. ihre zweite Projection normal zu a machen. Diese Operation ist einfacher als die vorangehende; lässt man daher an der Bewegung von E eine zu ihr senkrechte Gerade g theilnehmen, so wird man für die schwieriger zu construirenden Spuren s''^*, s'^{**} die Normalität zu $g_2{}^*$, $g_1{}^{**}$ benutzen.

Einen Würfel z. B., dessen ursprüngliche Projectionen zwei Quadrate sind, kann man durch zweimalige Drehung so stellen, dass die Diagonale zwischen zwei Gegenecken normal zu Π_1 ist. Die 12 Kanten projiciren sich dann in Π_1 als die sechs Seiten und die sechs Hälften der drei Hauptdiagonalen eines regelmässigen Sechsecks: alle haben gleiche Neigungen gegen Π_1; deshalb projiciren sich alle zwölf gleich gross und auch die Winkel zwischen zwei Kanten haben gleiche Projectionen in Π_1 (Nr. 20).

Zu der zweiten Projectionsebene sind aber die ursprünglich zur Π_1 parallelen Flächen noch normal und projiciren sich geradlinig, und erst eine nochmalige Drehung um eine d' entfernt auch diese Normalität.

Man versuche solche Drehungen auch mit dem Dodecaeder und Icosaeder, welche nach Nr. 108—110 in günstigeren Lagen zu einer Projectionsebene dargestellt sind.

Fünfter Abschnitt.

Einführung weiterer Projectionsebenen.

a. Die neue Projectionsebene ist einer der früheren parallel.

96. Diese Lage der neuen Projectionsebene haben wir schon einige Male, bei Umlegungen von Ebenen um Spurparallelen, erwähnt. *Die neue Projectionsaxe* $^*a$ ist parallel der alten. Ist die neue Projectionsebene $^*\Pi_1$ zu Π_1 parallel, so bleiben die zweiten Projectionen

ungeändert; die zweiten Ordinaten aber werden alle um die gleiche Strecke (algebraisch) verändert. Die neuen ersten Projectionen der Punkte müssen von $*a$ dieselbe Entfernung haben, wie die alten von a; die neue erste Projection einer Figur ist offenbar der alten vollständig congruent. Diese Verschiebung der ersten Projectionsfigur ist aber umständlich und wird dadurch vermieden, dass *man die Projectionsaxe, insofern sie zur ersten Projectionsebene gehört, an der alten Stelle a lässt und *a nur als die Lage der Projectionsaxe in der zweiten Projectionsebene auffasst.* Es bleibt dann jede erste Projection ebenfalls an ihrer Stelle.

Die vertical über einander liegenden Punkte von a und $*a$ entsprechen sich; die Spuren $*s'$ und s'' einer Ebene treffen a und $*a$ in entsprechenden Punkten. Aufriss und Grundriss befinden sich übrigens in technischen Zeichnungen oft auf verschiedenen Blättern; jedes enthält dann die Axe, und ein Paar entsprechender Punkte der beiden Axen muss markirt sein.

Die Schnittlinie zweier durch ihre Spuren s'_{E}, s''_{E}; s'_{Φ}, s''_{Φ} *gegebenen Ebenen* E *und* Φ soll mit Hilfe einer parallel verschobenen ersten Projectionsebene ermittelt werden, weil der Schnittpunkt der ersten Spuren unbequem liegt (Fig. 43). Die Axe $*a$ in Π_2 trifft die beiden zweiten Spuren in Punkten, durch deren entsprechende auf a die neuen ersten Spuren $*s'_{\mathsf{E}}$, s'_{Φ} parallel zu den alten gehen. Ihr Schnittpunkt $*U$ ist ein Punkt der gesuchten Linie; er fällt mit seiner Projection in $*\Pi_1$ zusammen, die zweite Projection liegt auf der Axe $*a = *\Pi_1\Pi_2$. Wir haben so einen Punkt $*U$ von k an Stelle des unbequemen Schnittpunktes U der beiden ersten Spuren in Π_1.

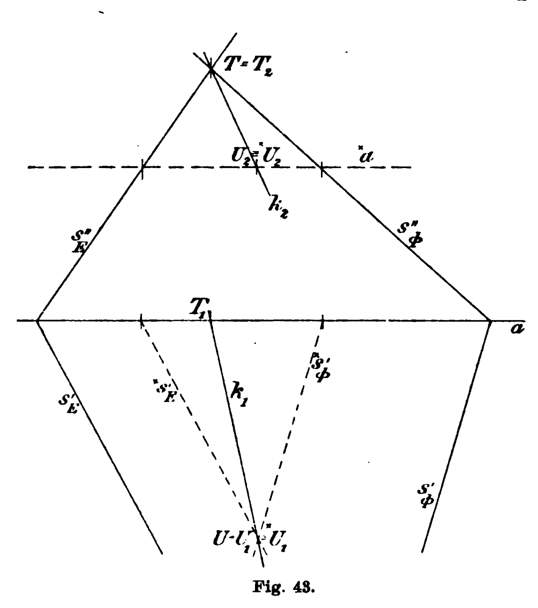


Fig. 43.

Zu derselben Figur sind wir in Nr. 65 gelangt, wo wir die Ebenen E und Φ mit einer zu Π_1 parallelen Ebene in ersten Spurparallelen schnitten, um einen Punkt der Schnittlinie k zu erhalten.

b. Die neue Projectionsebene steht auf beiden früheren senkrecht.

97. Wir denken uns *eine dritte Projectionsebene* Π_3 *eingeführt, welche zu* Π_1 *und* Π_2, *also zur Projectionsaxe* a, die jetzt a_{12} heissen soll, *senkrecht ist* (Querriss, Seitenriss, Profil). Es ergeben sich *zwei neue Projectionsaxen* $\Pi_1 \Pi_3 = a_{13}$ und $\Pi_2 \Pi_3$, welche beide auf a_{12} in demselben Punkte senkrecht stehen, dem Schnittpunkt O der drei Ebenen Π_1, Π_2, Π_3. Wird nun Π_2 um a_{12} in Π_1 umgelegt, so fällt (Fig. 44) $\Pi_2 \Pi_3$ als a_{23} auf dieselbe Linie wie a_{13} (senkrecht zu a_{12}). Wird auch Π_3 um a_{13} in Π_1 umgelegt, und zwar so, dass der obere Theil von Π_3 (Π_3+), der auf derselben Seite von Π_1 sich befindet wie Π_2+, nach rechts fällt, so fällt nun $\Pi_2 \Pi_3$ als a_{32} auf a_{12}, so dass durch den vorderen von den beiden Zeigern angedeutet werde, mit welcher Ebene Π die Axe umgelegt ist; die Namen sind an entsprechende Hälften geschrieben. Es entspricht also jedem Punkt P_{23} von $a_{23} \equiv a_{13}$ ein Punkt P_{32} von $a_{32} \equiv a_{12}$,

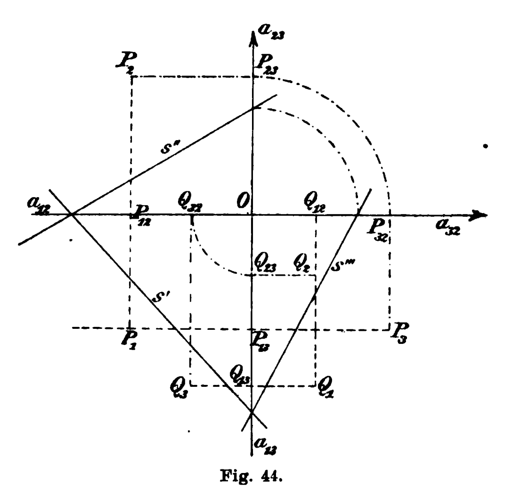


Fig. 44.

der von O eben weit absteht, wie jener, und zwar, wenn P_{23} auf a_{23} oberhalb (unterhalb) O liegt, rechts (links) von O fällt, so dass die Bewegung auf dem Quadranten von P_{23} nach P_{32} in dem Sinne der Uhrzeigerbewegung geschieht.

Es besteht ein ähnlicher Zusammenhang zwischen Π_1 und Π_3, als zwischen Π_1 und Π_2; dagegen ist der zwischen Π_2 und Π_3 nicht so unmittelbar. Wie die aus P_1 und P_2 auf a_{12} gefällten Lothe diese Axe in demselben Punkte P_{12} (früher P_a) treffen, so *wird auch* a_{13} *von den aus* P_1 *und der dritten Projection* P_3 *des Punktes* P *auf sie gefällten Lothen in demselben Punkte* P_{13} *getroffen, während man durch die Lothe aus* P_2 *auf* a_{23}, *aus* P_3 *auf* a_{32} *zu entsprechenden Punkten* P_{23} *und* P_{32} *gelangt. Zwischen diesen Lothen (Ordinaten) und den Abständen des Punktes* P *von den drei Projectionsebenen finden offenbar folgende Gleichheiten statt:*

$$P_2 P_{12} = P_3 P_{13} = P P_1;$$
$$P_1 P_{12} = P_3 P_{32} = P P_2;$$
$$P_1 P_{13} = P_2 P_{23} = P P_3.$$

Liegt P_2P_{12} oberhalb (unterhalb) a_{12}, so muss, entsprechend der obigen Festsetzung über die Umlegung von Π_3, die gleiche Ordinate P_3P_{13} rechts (links) von a_{13} fallen.

98. *Die dritte Projection P_3 eines Punktes P zu zeichnen, von dem die erste und zweite Projection bekannt sind* (Fig. 44). Man ziehe P_1P_{13} normal zu a_{13} und trage auf dieser Ordinatenlinie $P_3P_{13} = P_2P_{12}$ auch dem Vorzeichen nach auf; oder, was aber umständlicher ist: man ziehe P_2P_{23} normal zu a_{23}, übertrage P_{23} nach P_{32}, ziehe $P_{32}P_3$ normal zu a_{32} und auch dem Vorzeichen nach gleich $P_{12}P_1$; oder durch Vereinigung beider Operationen: man ziehe die Gerade P_1P_{13} normal zu a_{13}, ebenso P_2P_{23} normal zu a_{23}, übertrage P_{23} nach P_{32}, ziehe in P_{32} zu a_{32} die Normale, welche die P_1P_{13} in P_3 treffen muss.

Ebenso soll aus P_1, P_3 die zweite oder aus P_2, P_3 die erste Projection gefunden werden.

Die dritte Projection g_3 einer Gerade $g = (g_1, g_2)$ findet man, indem man die dritten Projectionen zweier beliebiger Punkte von g ermittelt. Wenn die drei Spuren S', S'', S''' sind, so ist der Punkt g_3a_{13} der Fusspunkt des aus S' auf a_{13} gefällten Lothes, der Punkt g_3a_{32} der Fusspunkt des aus S'' auf a_{23} gefällten Lothes, nach a_{32} übertragen. Das Loth auf a_{13} im Punkte g_1a_{13} oder das Loth auf a_{32} in dem entsprechenden Punkte des Punktes g_2a_{23} markirt auf g_3 den Spurpunkt S'''. Ist $g \parallel \Pi_1$, so sind g_2 und g_3 bez. parallel zu a_{12}, a_{13} in gleichem Abstande; ist $g \parallel \Pi_2$, so fallen g_1 und g_3 in dieselbe zu $a_{12} \equiv a_{32}$ parallele Gerade; ist $g \parallel \Pi_3$, so fallen g_1 und g_2 in dieselbe zu $a_{13} \equiv a_{23}$ parallele oder zu a_{12} senkrechte Gerade (Nr. 51).

In Bezug auf die drei Spuren einer Ebene gilt, dass, wie sich s' und s'' auf a_{12}, so auch s' und s''' auf a_{13} treffen, während s'' und s''' den Axen a_{23} und a_{32} bez. in entsprechenden Punkten begegnen (Fig. 44).

99. Die dritte Projectionsebene ist besonders erwünscht für *solche Geraden, die durch ihre beiden ersten Projectionen nicht vollständig bestimmt sind,* d. i. die in zu a_{12} normalen Ebenen sich befinden (Nr. 51). Zunächst ist jede solche Gerade g durch ihre dritte Projection und eine der beiden andern dann ebenso eindeutig bestimmt wie die andern Geraden (die dritte Projection wird aus den beiden Punkten M, N erhalten, durch deren erste und zweite Projectionen die Gerade bestimmt war). Das unmittelbare Lothen ist bei diesen Geraden ersichtlich nie möglich; ebenso versagt die gewöhnliche Construction der Spuren. Hat man z. B. die erste Projection P_1 eines Punktes einer solchen Gerade g, so muss man, wenn man nicht die in Nr. 45 erwähnte Proportionalität benutzen will, erst $g_3 = M_3N_3$ construiren,

P_1 auf g_3 als P_3 lothen, wodurch sich dann P_2 ergiebt, indem $P_3 P_{13} = P_2 P_{12}$ ist. Der Schnitt $g_3 a_{13}$, senkrecht zu a_{13} auf g_1 gelothet, giebt die erste Spur von g.

Ferner stellt sich wegen des Parallelismus mit Π_3 jede auf einer derartigen Gerade g gelegene Strecke in Π_3 in wahrer Grösse dar, die Winkel, die sie mit Π_1 und Π_2 oder mit einer auf Π_1, bez. Π_2 senkrechten Gerade bildet, sind in den $\sphericalangle(g_3, a_{13})$, (g_3, a_{32}), bez. deren Complementwinkeln und der Winkel zweier solchen Geraden g, l in dem $\sphericalangle(g_3, l_3)$ in wahrer Grösse zu sehen.

Liegen g und l in derselben zu a_{12} normalen Ebene, so dass $g_1 \equiv l_1 \equiv g_2 \equiv l_2$, so ist der Punkt $g_3 l_3$ die dritte Projection ihres Schnittpunktes, dessen andere Projectionen dann leicht zu finden sind.

100. Ebenso bietet Π_3 hinsichtlich *der zu* a_{12} *parallelen Geraden und Ebenen* einige Vortheile; dieselben projiciren sich auf Π_3 als Punkte, bez. Geraden. Soll z. B. durch einen Punkt P und eine zu a_{12} parallele Gerade g die Ebene gelegt werden, so hat man in der Verbindungslinie der Punkte P_3 und g_3 unmittelbar die dritte Spur (und dritte Projection) dieser Ebene, die dann leicht zu den beiden andern (zu a_{12} parallelen) Spuren führt.

Die Strecke $P_3 g_3$ ist die wahre Länge des Lothes aus P auf g (Nr. 31b).

Wenn E eine zu a_{12} parallele Ebene ist, so stellen sich die Neigungswinkel $\alpha' = (E, \Pi_1)$ und $\alpha'' = (E, \Pi_2)$ in den Winkeln, welche die dritte Spur (Projection) von E mit a_{13} und a_{32} bildet, dar; und wenn Φ eine zweite zu a_{12} parallele Ebene ist, so ist der Winkel (E, Φ) gleich dem von den beiden dritten Spuren gebildeten (Nr. 31e); der Schnittpunkt derselben ist die dritte Projection der Schnittlinie $E\Phi$.

Die Entfernung eines Punktes P von einer zu a_{12} parallelen Ebene E ist gleich dem Lothe aus P_3 auf die dritte Spur (Projection) dieser Ebene (Nr. 31a). Der Schnittpunkt einer beliebigen Gerade mit einer solchen Ebene ergiebt sich am schnellsten in der dritten Projection (Nr. 63).

c. Die neue Projectionsebene steht nur auf einer der früheren senkrecht.

101. Es werde jetzt *eine dritte Projectionsebene* Π_3 eingeführt, welche *nur noch auf einer der beiden gegebenen, auf* Π_1, *normal ist* und, Π_2 ersetzend, mit Π_1 ein eben solches Projectionsebenen-System bildet wie Π_1 und Π_2.

Die Gerade $\Pi_2\Pi_3$ ist, so lange Π_2 und Π_3 noch nicht in Π_1 umgelegt sind, zu Π_1 und daher sowohl zu $a_{12} = \Pi_1\Pi_2$, als zu $a_{13} = \Pi_1\Pi_3$ in demselben Punkte O senkrecht. Wird sie aber als a_{23} mit Π_2 umgelegt, so bleibt sie nur auf a_{12} senkrecht (in O), ihre Umlegung a_{32} mit der Ebene Π_3 bewahrt ihre Normalität zu a_{13} (in O); aber es fällt nicht mehr a_{23} mit a_{13}, a_{32} mit a_{12} zusammen; a_{23} und a_{32} haben auch hier entsprechende Punkte, die vorher vereinigt waren. Die einen entsprechenden Hälften sind durch Pfeile bezeichnet.

Auf die Seite von a_{13}, auf welche diejenige Halbebene Π_3^+ fällt, die sich auf der nämlichen Seite von Π_1 befindet wie Π_2^+, fallen die dritten Projectionen der Punkte, deren zweite Projectionen oberhalb a_{12} liegen. *Q_3 und P_3 fallen auf dieselbe oder verschiedene Seiten von a_{13}, je nachdem Q_2 und P_2 auf derselben oder verschiedenen Seiten von a_{12} liegen* (Fig. 45).

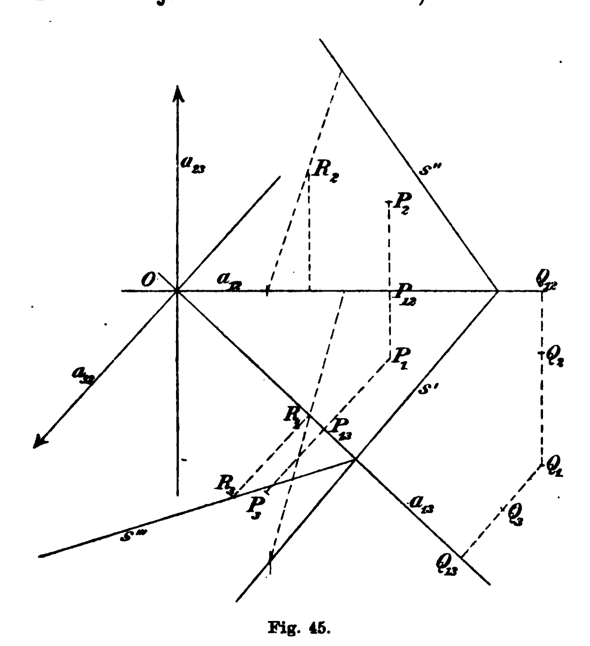


Fig. 45.

Ferner *ist auch hier*, wie P_1P_2 in P_{12} auf a_{12} senkrecht steht, *P_1P_3 auf a_{13} in P_{13} normal und $P_3P_{13} = P_2P_{12}$ auch dem Vorzeichen nach.* Was über Geraden und Ebenen im vorigen Falle gesagt ist, bleibt bestehen; der Unterschied ist ja auch nur der, dass dort der $\sphericalangle(a_{23}, a_{32}) = 90^0$, hier von 90^0 verschieden ist. Hinsichtlich der Ermittelung der dritten Spur s''' einer Ebene, welche die a_{13} in dem Punkte $a_{13}s'$ und die a_{32} in dem entsprechenden Punkte von $a_{23}s''$ treffen muss, mag noch auf eine etwaige unbequeme Lage eines dieser Punkte Rücksicht genommen werden (Fig. 45). Man nehme dann einen Punkt R_1 auf a_{13} an, suche R_2 so, dass R in der Ebene E liegt (Nr. 64), construire R_3, welches auf s''' liegen muss.

Der Schnitt der dritten Spuren zweier Ebenen kann, wenn andere Spuren weniger günstig sind, einen Punkt der Schnittlinie derselben liefern.

Für viele Aufgaben genügt a_{13}, und a_{23}, a_{32} sind nicht nothwendig.

Das System $\Pi_1 \Pi_3$ hat natürlich auch eine Ebene der Deckelemente, und zwischen der ersten und der dritten Projection eines ebenen Feldes besteht Affinität.

102. Mit Hilfe einer solchen dritten auf Π_1 senkrechten Projectionsebene kann man auch *die wahre Grösse einer Strecke PQ und den Neigungswinkel einer Gerade g gegen diese Projectionsebene* Π_1 finden. Man hat Π_3 parallel zu PQ oder g zu stellen, also a_{13} parallel zu $P_1 Q_1$ oder g_1 zu ziehen; $P_3 Q_3$ ist dann $= PQ$ und $\sphericalangle (g_3, a_{13})$ ist der verlangte Winkel.

Diese Lösung ist jedoch im Grunde nicht wesentlich verschieden von der in Nr. 44 und geht in sie über, wenn a_{13} identisch wird mit $P_1 Q_1$ oder g_1.

Man construire entsprechend den Neigungswinkel (g, Π_2).

Es hat sich gezeigt, dass Ebenen, die zu einer Projectionsebene normal sind, manche Vorzüge haben. *Ist also eine beliebige Ebene* E *gegeben, so stellen wir* Π_3 (Fig. 46, Taf. II) *senkrecht zu* Π_1 *und senkrecht zu* E, also senkrecht zur Schnittlinie $s' = E\Pi_1$; weshalb auch s' und a_{13} senkrecht sind. Und umgekehrt, wenn a_{13} und s' normal zu einander sind, so steht s', in der einen Π_1 der beiden zu einander senkrechten Ebenen Π_1, Π_3 normal zur Schnittlinie gezogen, senkrecht auf der andern Π_3 und daher auch die durch sie gehende E senkrecht auf Π_3.

Π_3 ist also Ebene eines Neigungswinkels von E und Π_1; d. h. *der Winkel* (s''', a_{13}) *ist dieser Neigungswinkel* α'. Die Figur ist dieselbe wie in Nr. 82.

Die dritte Projection eines Punktes von E fällt auf s'''; daher ist es leicht, *einen Punkt P in E zu legen;* seine dritte Projection P_3 legt man auf s''' und erste Projection P_1 kann jeder Punkt der Ordinatenlinie sein, die aus P_3 senkrecht zu a_{13} geführt ist; daraus ergiebt sich dann P_2. Die Projectionen *des Lothes p in P auf* E gehen durch P_1, P_2, P_3 normal bezw. zu s', s'', s'''; zu Π_3 ist es parallel; daher wird man von *einer auf ihm etwa von P aus aufzutragenden Strecke PQ* (Nr. 44) zuerst die dritte Projection, die ihr gleich ist, auftragen und dann in die beiden andern übertragen. Ebenso liefert die Entfernung $Q_3 P_3$ der dritten Projection Q_3 eines beliebigen Punktes Q von s''' *die Länge des aus Q auf E gefällten Lothes QP.*

103. Für andere Zwecke, z. B. um eine Gerade g zur Normalität, eine Ebene E zum Parallelismus zu einer Projectionsebene zu bringen, genügt nicht blos eine dritte, sondern es muss *noch eine vierte Projectionsebene* Π_4 eingeführt werden, *welche senkrecht auf* Π_3 *steht* und an Stelle von Π_1 tritt; denn damit Π_3 normal zu g, bez. parallel zu E und ausserdem senkrecht noch zu Π_1 wäre, müsste g schon parallel,

E senkrecht zu Π_1 sein. Hat man Π_3 parallel zu g, bez. senkrecht auf E (also auf s') gestellt, so kann man nun Π_4 so senkrecht auf Π_3 stellen, dass sie normal zu g, bez. parallel zu E ist.

Hinsichtlich der Ebenen Π_4, Π_3, Π_1 gilt nun ganz dasselbe, was vorher für Π_3, Π_1, Π_2 galt; besonders wichtig für die Construction ist, dass, wenn P_4 nun die vierte Projection des Punktes $P = (P_1, P_2, P_3)$ ist, *P_4P_3 auf $a_{34} = \Pi_3\Pi_4$ (in P_{34}) senkrecht steht, $P_4P_{34} = P_1P_{13} = PP_3$, und dass die vierten Projectionen zweier Punkte auf derselben oder verschiedenen Seiten von a_{34} liegen, je nachdem sich die ersten auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von a_{13} befinden.* Die zuerst construirte vierte Projection eines Punktes kann man beliebig legen; dann ist das Entsprechen der Seiten von a_{13} und a_{34} bestimmt.

An der Figur wird nichts geändert, ob man sich Π_3 um a_{13} in Π_1, wobei Π_4 mitgenommen wird, und dann Π_4 um a_{34} in Π_3 umgelegt denkt, oder Π_1 und Π_4 um a_{13} und a_{34} in Π_3. Bei letzterem Umlegen erhält man die Axe $\Pi_1\Pi_4$ mit Π_1 umgelegt nach a_{14} senkrecht auf a_{13} in dem Punkte $O' = \Pi_1\Pi_3\Pi_4 = a_{13}a_{34}$ und mit Π_4 nach a_{41} umgelegt senkrecht auf a_{34} ebenfalls in O'; wobei dann wieder entsprechende Punkte auf a_{14} und a_{41} sich ergeben. Ueber die vier Spuren s', s'', s''', s^{IV} einer Ebene gilt, dass s', s'' sich auf a_{12}, s', s''' auf a_{13}, s''', s^{IV} auf a_{34} treffen, während a_{23} und a_{32} bez. von s'' und s''', a_{14} und a_{41} bez. von s' und s^{IV} in entsprechenden Punkten getroffen werden.

104. a) *Um die Ebene E einer Figur parallel zu einer Projectionsebene zu machen,* so dass die Figur sich congruent projicirt, legt man zuerst Π_3 (und deshalb a_{13}) senkrecht zu s', also zu Π_1 und E; es wird nun s''' construirt und die dritte Projection der Figur. Darauf wird Π_4 eingeführt, welche senkrecht auf Π_3 und parallel (oder identisch) mit E ist, also a_{34} parallel (oder identisch) mit s'''; die vierte Projection der Figur giebt die wahre Gestalt.

b) *Den kürzesten Abstand und den Neigungswinkel zweier windschiefen Geraden $g = AB$ und $l = CD$* findet man auch mit Hilfe der Einführung von Π_3 und Π_4 in folgender Weise (Fig. 47). Man construirt zunächst eine Ebene E, welche den beiden Geraden g und l parallel ist (Nr. 76); sie ist durch g und die zu l parallele Gerade m gelegt: h' ist eine erste Spurparallele dieser Ebene, also $h_1' \parallel s'$. Π_3 ist auf h_1', also auf E und Π_1, mithin a_{13} senkrecht auf h_1', sodann Π_4 senkrecht auf Π_3 und parallel zu E zu stellen wie in a). In Bezug auf Π_4 und Π_3 gilt nun ganz dasselbe, wie für Π und Π_2 in Nr. 32; g_3 und l_3 werden also parallel; a_{34} ist mit ihnen ebenfalls parallel zu führen. Der Winkel (g_4, l_4) giebt den gesuchten Winkel;

der Punkt $g_4 l_4$ ist die vierte Projection des beide Geraden schneidenden gemeinsamen Lothes; p_3, welche durch den Punkt p_4 senkrecht zu g_3, l_3, a_{34} geht, giebt, soweit sie zwischen g_3 und l_3 liegt, den kürzesten

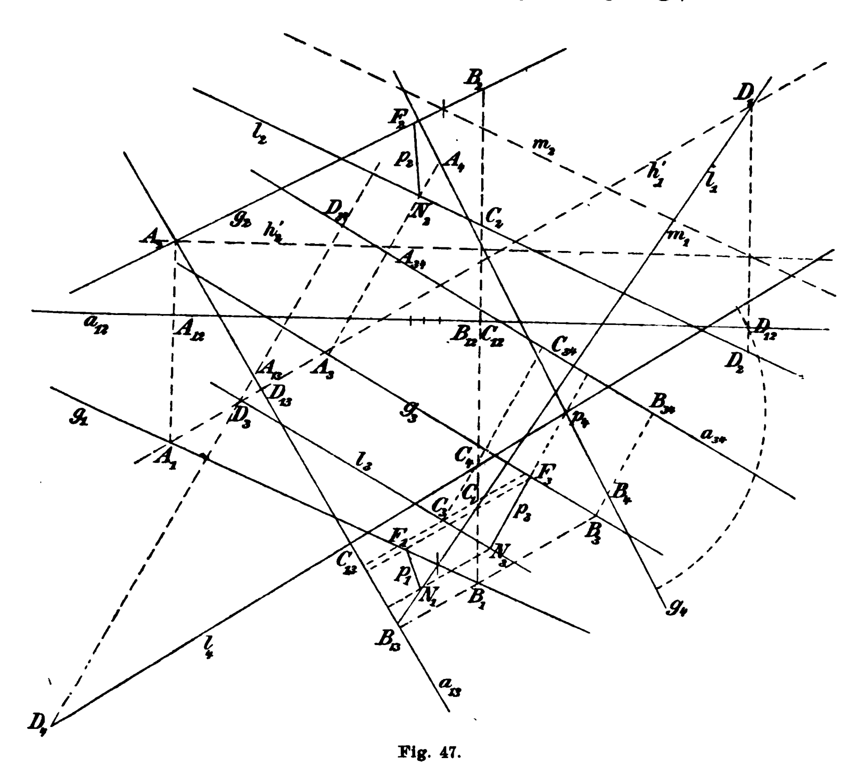


Fig. 47.

Abstand. Die Lage des Lothes erhält man, wenn man die dritten Projectionen F_3, N_3 seiner Fusspunkte nach Π_1 und Π_2 zurückführt.

Die Axen a_{23}, a_{32}, a_{14}, a_{41} sind hier überflüssig; wohl aber sind sie in der folgenden Aufgabe für die Construction der Spuren nothwendig.

c) Wir wollen *den Neigungswinkel zweier Ebenen* E *und* Φ durch Π_3 und Π_4 erhalten (Fig. 48, Taf. II). Man construire $k = \mathsf{E}\Phi$, stelle Π_3 senkrecht auf Π_1 und parallel zu k (also $a_{13} \parallel k_1$), wodurch $s_{\mathsf{E}}''' \parallel s_{\Phi}''' \parallel k_3$ werden muss, und dann Π_4 senkrecht auf Π_3 und k, also a_{34} normal zu k_3; der $\sphericalangle (s_{\mathsf{E}}^{\mathrm{IV}}, s_{\Phi}^{\mathrm{IV}})$ ist dann der verlangte (Nr. 31 e). Der Punkt $s_{\mathsf{E}}^{\mathrm{IV}} s_{\Phi}^{\mathrm{IV}}$ ist die vierte Projection von k und muss auf k_3 liegen (Nr. 48).

d) Unter dem *Normalschnitt eines Prismas* versteht man die Schnittfigur desselben mit einer zu den Seitenkanten normalen Ebene. Führt man nun bei einem durch seine Projectionen in Π_1 und Π_2 dargestellten Prisma allmählig Π_3 parallel zu den Seitenkanten und Π_4 senkrecht

zu ihnen ein, so sind die vierten Projectionen der Seiten-Kanten und -Flächen Punkte und gerade Linien und bilden den Normalschnitt. Als schneidende Ebene kann Π_4 selbst betrachtet werden. In Π_3 stellen sich die auf den Seitenkanten befindlichen Strecken, z. B. je die von der Ecke des Normalschnitts bis zu der der Grund- oder Deckfigur, in wahrer Länge dar.

d. Die neue Projectionsebene ist zu keiner der gegebenen normal.

105. Statt mit zwei neuen Projectionsebenen, wie im Vorangehenden, zu arbeiten, kann man, die Normalität zu einer der früheren aufgebend, eine beliebig gelegene dritte einführen. Wir haben schon einige Male auf Eigenschaften hingewiesen, welche erhalten bleiben, wenn zwei Projectionsebenen nicht mehr rechtwinklig sind, aber auf beide orthogonal projicirt wird (Nr. 42, 48, 55, 67).

Es seien Π_1, Π_3 zwei solche Projectionsebenen, a_{13} ihr Schnitt; ihre spitzen Flächenwinkel ϑ kennt man und weiss, von welchen Halbebenen sie gebildet werden. Die Lothe aus P_1 und P_3 auf a_{13} haben denselben Fusspunkt P_{13} (Nr. 42), und die Betrachtung des eventuell verschlungenen Vierecks $PP_1P_{13}P_3$ lehrt folgende Construction: man stelle zwei mit ϑ gleiche Scheitelwinkel her (Fig. 49b, Taf. II), trägt auf den einen Schenkel vom Scheitel S ab die bekannte Ordinate $P_{13}P_1$ als ST auf, nach der einen oder andern Seite von S, je nachdem P_1 auf der einen oder andern Seite von a_{13} liegt, errichtet auf diesem Schenkel in T das Loth TU gleich der zweiten Ordinate $P_{12}P_2$ und zwar nach der Seite, wo ϑ liegt, oder nach der andern, je nachdem der Abstand P_1P auf der Seite des Flächenwinkels ϑ liegt oder nicht. Von U fällt man dann auf den andern Schenkel das Loth UV, so ist $SV = P_{13}P_3$; und dies trägt man auf der Ordinatenlinie P_1P_{13} von P_{13} auf, wo beim ersten Punkte die Seite von a_{13} wieder willkürlich ist, bei den weiteren aber ähnliches gilt wie in b., c.

Auf die mühsamere Construction von a_{23} und a_{32}, die nicht zu a_{12}, bezw. a_{13} normal sind, wird man verzichten und daher auch auf die Benutzung von Spuren von Ebenen in dieser Π_3; man wird lediglich mit den Projectionen von Punkten arbeiten.

In der Aufgabe b) der vorigen Nummer nehmen wir (Fig. 49, Taf. II) die Ebene E als Π_3, haben daher ihre erste Spur a_{13} und ihren Winkel gegen Π_1 zu ermitteln und festzustellen, von welchen Halbebenen der spitze Flächenwinkel gebildet wird. Nunmehr werden von vier Punkten A, B, C, D der beiden Geraden g, l die dritten Projectionen construirt; weil g in Π_3 liegt, so sind für A, B die Lothe UV null.

Man hat dann g_3, l_3 und in ihrem Winkel den von g und l selbst; g_3 muss durch S_g' gehen, der hier auch S_g''' ist. Der Schnittpunkt p_3 von g_3, l_3 ist die dritte Projection der Gerade p, welche g und l rechtwinklig schneidet; die erste Projection p_1 geht durch diesen Punkt und ist senkrecht zu a_{13} (Nr. 48); ihre Schnitte mit g_1, l_1 sind die ersten Projectionen F_1, N_1 der Fusspunkte, aus denen durch Lothen die zweiten sich ergeben. Die wahre Länge FN des kürzesten Abstandes muss, weil hier p zu keiner der benutzten Projectionsebenen parallel ist, nach der gewöhnlichen Methode ermittelt werden.

In a) und d) nimmt man E, bezw. eine zu den Kanten normale Ebene als Π_3 und stellt die dritte Projection der Figur in E, der Grund- oder Deckfigur des Prismas her, wodurch sich die wahre Gestalt jener, bezw. des Normalschnittes ergiebt.*)

Für die Aufgabe c), in der mit Spuren gearbeitet wird, empfiehlt sich eine solche Projectionsebene nicht.

Sechster Abschnitt.

Polyeder.

a) Darstellung von Polyedern.

106. *Es möge ein Prisma construirt werden; von demselben ist die Grundfigur ihrer Gestalt und Lage nach gegeben, d. h. ihre Ebene* E *und ihre Umlegung* $A_0B_0C_0D_0E_0$ *mit* E *in* Π_1. *Ferner sind noch die Länge der durch* A *gehenden Seitenkante* AF *und die beiden Winkel* β *und* γ, *welche sie mit den Grundkanten* AE *und* AB *bildet, gegeben* (Fig. 50, Taf. III). Der Winkel der Grundfigur bei A sei α. An die beiden Schenkel A_0B_0 und A_0E_0 lege man zu beiden Seiten β und γ an, trage auf ihren äusseren Schenkeln die Länge der Seitenkante AF auf als A_0F_0' und A_0F_0'', so dass $F_0'A_0E_0$ und $F_0''A_0B_0$ die zunächst mit ihren Ebenen in E und dann mit E in Π_1 umgelegten Winkel FAE und FAB sind. Wie in Nr. 22 aus P_0' und P_0'' die Projection P_1 und die Höhe PP_1 des Punktes P über Π gefunden wird, so finden wir hier ebenfalls den Fusspunkt L_0 des aus F auf E gefällten Lothes (zu-

*) Es wird dem Leser empfohlen, einmal mehrere Lösungen derselben Aufgabe, z. B. folgende drei Lösungen von d) in Bezug auf die Anzahl der vorzunehmenden Operationen zu vergleichen: die obige, die in Nr. 104 und diejenige, bei der nur Π_1, Π_2 benutzt, die Schnitte der Kanten des Prismas mit der Normalebene construirt werden und diese umgelegt wird. Solche Vergleichungen sind sehr lehrreich.



nächst mit E umgelegt) und die Länge L_0F_0''' dieses Lothes, die Höhe FL des Prismas. Für die Aufrichtung des Fünfecks $ABCDE$ aus seiner Umlegung ist in der Figur das Verfahren von Nr. 72 benutzt worden; für diejenige von L ist die Gerade CL und ihr Schnitt M mit AE aus der Umlegung in die Projectionen übertragen worden. Auf dem durch L gehenden Lothe p zur Ebene E ist dann die eben ermittelte Länge nach der Methode von Nr. 93 aufgetragen. Man kann aber auch, da beim Aufrichten von E der Winkel α' dieser Ebene gegen Π_1 ermittelt worden ist, d. i. das Complement des Winkels, den das Loth mit Π_1 bildet, $L_1F_1 = LF \sin\alpha'$ construiren und auf p_1 auftragen. Durch die andern Ecken der Grundfigur sind dann Kanten parallel und gleich mit AF zu ziehen.

Aehnlich ist dieselbe Aufgabe für eine Pyramide zu lösen; es vereinfacht sich die Lösung wesentlich, wenn für das Prisma statt der Neigungen β und γ gleich von vornherein die Richtung der Seitenkanten gegeben ist, oder bei der Pyramide die Spitze.

Es empfiehlt sich, die Entfernung der Spitze der Pyramide oder eines Punktes der oberen Fläche des Prismas von der Ebene der Grundfläche nach Nr. 63 zu bestimmen und festzustellen, dass sie nicht zu klein ist, damit man nicht einen zu flachen, beinahe ebenen Körper erhalte.

Die Aufgaben, einen Würfel oder ein (reguläres) Tetraeder zu zeichnen, dessen Grundfläche der Lage nach gegeben ist, sind damit auch erledigt; und das Octaeder wird man als eine Doppelpyramide über einem Quadrate construiren, deren Höhe die halbe Diagonale des Quadrats ist.

107. Die Körper werden gewöhnlich materiell vorgestellt; *es werden also die Ecken, Kanten und Flächen zum Theil unsichtbar sein* und zwar im allgemeinen in der einen Projectionsebene anders als in der andern (Nr. 66). Für *convexe Polyeder* (auf deren Betrachtung wir uns beschränken), welche nur ausspringende Flächenwinkel haben und von keiner Gerade in mehr als zwei Punkten getroffen werden, gilt offenbar Folgendes: In einer sichtbaren Kante schneiden sich entweder zwei sichtbare oder eine sichtbare und eine unsichtbare Fläche. Im zweiten Falle gehört die Kante zu den *Umrisskanten* (oder Randkanten) des Polyeders, die man also, je nachdem es sich um die erste oder zweite Projection handelt, erste oder zweite Umrisskanten nennt. Die projicirende Ebene einer Umrisskante streift (berührt) das Polyeder, während die einer andern Kante es durchschneidet. *Die Umrisskanten*, welche die Projectionsfigur einschliessen, *sind demnach jederzeit sichtbar*, z. B. in der Figur 50 in der ersten Projection die Kanten EA,

AB, BC, CH, HJ, JK, KE, in der zweiten die Kanten *DE, EA, AF, FG, GH, HJ, JD.* Folglich handelt es sich darum, die übrigen Kanten, welche, weil ihre Projectionen ins Innere der vom Umrisse eingeschlossenen Figur fallen, *innere* heissen mögen, in Bezug auf ihre Sichtbarkeit oder Unsichtbarkeit zu untersuchen. Die erste Projection z. B. von *DE* durchschneidet sich mit der von *FK*; lothen wir diesen Schnittpunkt auf die beiden zweiten Projectionen der Kanten, so ergiebt sich bei *KF* der höhere Punkt; also ist sie sichtbar und *DE* unsichtbar. *Zwei sichtbare oder zwei unsichtbare Kanten können sich nicht scheinbar schneiden.*

Die Sichtbarkeit in der zweiten Projection wird in ähnlicher Weise an dem weiteren Vorliegen in der ersten Projectionsebene erkannt.

Man wird nicht für alle Kanten dieselbe umständliche Untersuchung zu machen brauchen; denn hat man es für einige Kanten auf diese exacte Art festgestellt, so lässt sich auf andere leicht schliessen. Wenn nämlich eine Fläche sichtbar ist, so sind alle ihre Kanten und Ecken sichtbar; von einer unsichtbaren Fläche hingegen sind alle innern Kanten und Ecken unsichtbar; ist demnach eine innere Kante schon als sichtbar oder unsichtbar erkannt, so sind alle innern Kanten, die mit ihr zu derselben Fläche gehören, sichtbar oder unsichtbar. Jede Kante, die durch eine sichtbare innere oder eine unsichtbare Ecke geht, ist selbst sichtbar, bez. unsichtbar.

So sind in Fig. 50 von den innern Kanten der ersten Projection sichtbar die drei von *F* ausgehenden und *BG, GH,* unsichtbar die von *D* ausgehenden, in der zweiten Projection sind sichtbar die drei von *K* ausgehenden, unsichtbar die von *C* ausgehenden und *AB, BG.*

Von zwei parallelen Flächen eines convexen Polyeders ist eine sichtbar, die andere unsichtbar.

108. Wir wenden uns zur Darstellung des (regelmässigen) *Dodecaeders* (Fig. 51, Taf. III)*).

Wenn ϵ, ϵ' die Ebenen zweier Gegenflächen dieses Polyeders sind, so vertheilen sich seine 20 Ecken zu je fünf auf sie und zwei weitere zu ihnen parallelen Ebenen φ, φ' zwischen ihnen, die derartig gelegen sind, dass ϵ und φ dieselbe Entfernung haben wie ϵ' und φ'. Wir stellen diese 4 Ebenen parallel zu Π_1 und lassen am besten die unterste ϵ in Π_1 fallen; ihre vier zweiten Spuren seien $e \equiv a, f, f', e'$, Parallelen von analoger Eigenschaft.

ABCDF sei das Fünfeck in ϵ oder Π_1 und $\mathfrak{K}$ der ihm umgeschriebene Kreis; die fünf Kanten *AF, BG, CH, DJ, EK,* die von

*) In ihr und einigen andern Figuren sind die Projections-Zeiger 1, 2, · · · weggelassen.

seinen Ecken in die Höhe steigen, haben gleiche Neigung gegen Π_1, also gleiche Projectionen $AF_1, \cdots$, welche ersichtlich in die Verlängerungen der aus den Ecken des Grundfünfecks auf die Gegenseiten gefällten Höhen über jene Ecken fallen, so dass die fünf Projectionen F_1, G_1, H_1, J_1, K_1 der in φ gelegenen Ecken auch ein regelmässiges Fünfeck bilden, das zu $ABCDE$ ähnlich liegt in Bezug auf den Mittelpunkt Z von $\mathfrak{K}$; der umgeschriebene Kreis sei $\mathfrak{K}'$. Die 10 übrigen Punkte in φ' und ϵ' projiciren sich ebenfalls in zwei regelmässige Fünfecke, welche diesen beiden Kreisen $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}$ eingeschrieben sind und ähnlich zu einander liegen in Bezug auf Z; von dem an das untere Fünfeck in AB anstossenden Fünfecke $ABGLF$, dessen höchster Eckpunkt L in φ' liegt, projiciren sich die gleichen und gleich gegen Π_1 geneigten Seiten LF, LG gleich lang; d. h. L_1 halbirt den Bogen F_1G_1, und beide dem $\mathfrak{K}'$ eingeschriebenen Fünfecke bilden ein regelmässiges Zehneck $F_1L_1G_1M_1H_1N_1J_1O_1K_1P_1$, und daraus folgt, dass dies auch die beiden dem $\mathfrak{K}$ eingeschriebenen Fünfecke thun; dies Zehneck ist $AQ_1BR_1CS_1DT_1EU_1$.

Für diese beiden concentrischen Zehnecke und die Entfernungen der vier Spuren in Π_2 gelten überaus einfache die Construction erleichternde Eigenschaften.

Wenn einem Kreise wie $\mathfrak{K}$ vom Radius r ein regelmässiges n-Eck und ein regelmässiges $2n$-Eck eingeschrieben sind, so gilt für deren Seiten s_n und s_{2n} bekanntlich: $s_n = \frac{s_{2n}}{r}\sqrt{4r^2 - s_{2n}^2}$; dieselbe Beziehung gilt dann auch für d_n, die eine Ecke überspringende Diagonale des n-Ecks, und s_n; also $d_n = \frac{s_n}{r}\sqrt{4r^2 - s_n^2}$. Nun ist $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$; also:

$$s_5 = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \quad d_5 = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \text{ und daher: } d_5 = \frac{s_5}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Für die Herstellung von $ABCDE$ wird man, von s_5 ausgehend, mit Hilfe dieser leicht zu construirenden Grösse d_5, zu einer Seite die Gegenecke construiren und dann die beiden noch übrigen Ecken. Es empfiehlt sich aber, dies Fünfeck möglichst genau zu controlliren: in Bezug auf die Gleichheit der Diagonalen, der Höhen, das Zusammenlaufen dieser in Z, die Halbirung der Seiten durch die Höhen. Ferner vermeide man, dass eine von seinen Seiten ganz oder nahezu senkrecht zur Projectionsaxe werde, weil sonst Seitenflächen in Π_2 geradlinige oder sehr schmale Projectionen erhalten. Die Seiten des $\mathfrak{K}'$ eingeschriebenen Fünfecks $F_1G_1H_1J_1K_1$ sind die Projectionen von Fünfeckdiagonalen d_5, welche zu Π_1 parallel sind, also gleich d_5. Ist daher

r' der Radius von $\mathfrak{K}'$, so hat man: $r' : r = d_5 : s_5$; daher: $r' = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1)$ und $r' - r = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = s_{10}$.

Die Differenz der Radien der beiden concentrischen Kreise ist gleich der Seite des dem kleineren eingeschriebenen regelmässigen Zehnecks.

Dies reicht, nachdem $ABCDE$ hergestellt ist, zur Construction der ersten Projectionen aller weiteren Ecken hin; und die 10 Fünfecke, die an die Grund- und die Deckfläche anstossen, unterrichten, wie diese Punkte zu den Projectionen der 25 übrigen Kanten zu verbinden sind.

Für die zweite Projection sind nur noch die Entfernungen $\overline{ef} = \overline{f'e'}$ und $\overline{ff'}$ erforderlich. Die Kante AF, welche von ϵ nach φ geht, projicirt sich in die Differenz $AF_1 = s_{10}$ der Radien; daher ist $\overline{ef} = \sqrt{s_5^2 - s_{10}^2} = r$ nach der bekannten Euklidischen Formel $s_5^2 = s_{10}^2 + r^2$. Ferner ist $s'_{10} = \frac{s_{10} \cdot r'}{r} = \frac{s_{10}}{2}(\sqrt{5} + 1) = \frac{2 s_{10}}{\sqrt{5} - 1} = r$. In diese Zehneckseite projiciren sich die Kanten, welche von φ nach φ' gehen; daher ist $\overline{ff'} = \sqrt{s_5^2 - r^2} = s_{10}$.

Die beiden gesuchten Entfernungen $\overline{ef}$ *oder* $\overline{\epsilon\varphi}$ *und* $\overline{ff'}$ *oder* $\overline{\varphi\varphi'}$ *sind also* r, s_{10}.

Nun sind die ersten Projectionen auf diese vier Spuren e, f, f', e' zu lothen und in der entsprechenden Weise zu Kanten zu verbinden.

Die 10 Kanten des Dodecaeders, welche sich in Π_1 in die 10 Seiten des $\mathfrak{K}'$ eingeschriebenen Zehnecks projiciren, bilden ein regelmässiges windschiefes Zehneck, dessen gleiche Winkel (108^0) abwechselnd auf der einen und andern Seite liegen.

Sie setzen den ersten Umriss zusammen; im Uebrigen ist in Π_1 die Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit unmittelbar zu erkennen, während in Π_2 doch einige exacte Ermittelungen gemacht werden müssen.

Man construire nach Nr. 22 aus den drei Kantenwinkeln 108^0 den Flächenwinkel des Dodecaeders. — Die Höhe h_5 einer Seitenfläche ist $\sqrt{d_5^2 - \frac{s_5^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{15 + 5\sqrt{5}}$; eine von denen, welche von ϵ nach φ' gehen, lehrt, da sie mit ihrer Projection auf Π_1 den Nebenwinkel jenes Flächenwinkels einschliesst, dass dessen Sinus $\frac{s_{10} + r}{h_5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ist und der Cosinus $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

109. Beim *Icosaeder* (Fig. 52) führen auch zwei Gegenflächen ϵ, ϵ' zu zwei zwischen ihnen befindlichen Parallelebenen φ, φ', in denen die 6 übrigen Ecken liegen. Das Dreieck in ϵ sei ABC, seine Seite, also die Kante des Icosaeders s_3, der umgeschriebene Kreis $\mathfrak{K}$ und r sein Radius. Die 3 Ecken in φ sind in den Dreiecken, die an ABC mit Seiten anstossen, die Gegenecken, ihre Projectionen in $\Pi_1 \equiv \epsilon$ bilden ein gleichseitiges Dreieck in einem concentrischen Kreise $\mathfrak{K}'$, das so ähnlich zu ABC in Bezug auf den Mittelpunkt liegt, dass entsprechende Ecken sich auf verschiedenen Seiten desselben befinden Dass diese beiden Dreiecke durch die ersten Projectionen der in ϵ'

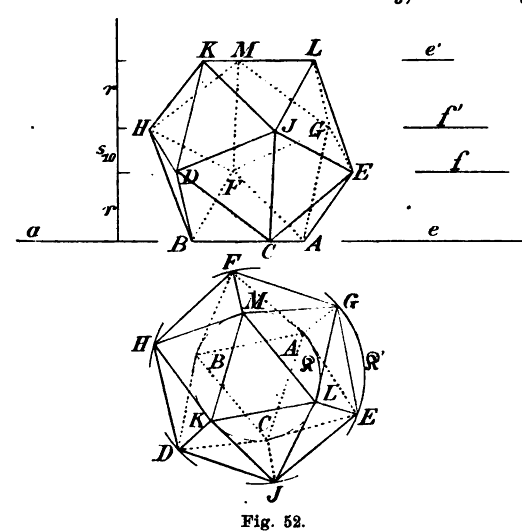


Fig. 52.

und φ' befindlichen zu regelmässigen Sechsecken in $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ vervollständigt werden, erkennt man wie vorhin. Von jeder Ecke gehen fünf Dreiecke aus, und die ihr gegenüber liegenden Seiten derselben bilden ein regelmässiges ebenes Fünfeck. Zu zwei Ecken in φ giebt es immer eine in ϵ, mit der sie ein gleichschenkliges Dreieck bilden; seine Spitze ist diese Ecke, die Schenkel sind Kanten des Icosaeders, und der Winkel an der Spitze ist der Polygonwinkel eines solchen Fünfecks, wie es eben beschrieben wurde; es gehört zu derjenigen Ecke in φ', die der dritten Ecke in φ gegenüber liegt Die Basis des Dreiecks, welche mit ihrer ersten Projection gleich ist, sei s_3'; dann haben wir: $s_3' = 2 s_3 \sin 54^0$, und daher $r' = 2r \sin 54^0$. Aber $\cos 54^0 = \frac{1}{2}\frac{s_5}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, $2 \sin 54^0 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$; folglich $r' - r = s_{10}$.

Die Differenz der Radien der beiden concentrischen Kreise $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ ist daher auch hier gleich der Seite des dem kleineren eingeschriebenen regelmässigen Zehnecks.

In diese Differenz projiciren sich in Π_1 die Kanten, welche von ϵ nach φ' oder von φ nach ϵ' gehen; daher ist die Entfernung $\overline{\epsilon\varphi'} = \overline{\varphi\epsilon'} = \sqrt{s_3^2 - s_{10}^2} = r + s_{10}$, weil bekanntlich $s_3^2 = s_{10}^2 + (r + s_{10})^2$. Die Kanten, welche von φ nach φ' gehen, projiciren sich in die Seiten des

$\mathfrak{K}'$ eingeschriebenen regelmässigen Sechsecks, also in $r' = r + s_{10}$, und die Entfernung $\overline{\varphi\varphi'}$ ist $\sqrt{s_3^2 - (r + s_{10})^2} = s_{10}$; daher ist $\overline{\epsilon\varphi} = \overline{\varphi'\epsilon'} = r$.

Hier wie vorhin haben die vier parallelen Ebenen (*und ihre Spuren in* Π_2) *die Entfernungen* r, s_{10}, r; wo r, s_{10} der Radius des einer Seitenfläche umgeschriebenen Kreises und die Seite des diesem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Zehnecks sind.*)

Steht das Polyeder mit keiner von seinen Flächen in einer der Projectionsebenen, sondern ist eine Fläche in eine beliebige Ebene E gelegt, so wird man dieselbe, etwa nach Π_1, umlegen und nach der vorangehenden Anweisung construiren; die ersten Projectionen stellen uns dann die Umlegungen der Fusspunkte der aus den Ecken auf E gefällten Lothe dar und die zweiten Ordinaten geben uns die Länge dieser Lothe. Jene wird man mit E wieder aufrichten, in ihnen die Lothe errichten und auf diesen, am besten mit Hilfe einer zu Π_1 und E senkrechten Projectionsebene Π_3 (Nr. 102), die Längen auftragen.

110. Stellt man das Icosaeder mit einer Hauptdiagonale senkrecht auf Π_1, so projiciren sich die 10 übrigen Ecken in ein regelmässiges Zehneck um die gemeinsame Projection der durch die Diagonale verbundenen Gegenecken. Sei auch hier s_{10} die Seite dieses Zehnecks und r der Radius des umgeschriebenen Kreises $\mathfrak{K}$, so haben die vier parallelen Ebenen ϵ, φ, φ', ϵ', in denen je 1, 5, 5, 1 Ecken liegen, die Entfernungen $\overline{\epsilon\varphi} = \overline{\varphi'\epsilon'} = s_{10}$, $\overline{\varphi\varphi'} = r$; denn die von ϵ nach φ oder von ϵ' nach φ' gehenden Kanten projiciren sich in Radien des Kreises $\mathfrak{K}$ und die von φ nach φ' gehenden in Seiten des Zehnecks, die in φ oder φ' gelegenen in Seiten s_5 des $\mathfrak{K}$ eingeschriebenen Fünfecks, so dass s_5 die Kante ist.

Stellt man das Dodecaeder in ähnlicher Weise, so treten auch halbregelmässige Vielecke auf.

Constructiv erhält man (Nr. 22) den Flächenwinkel des Icosaeders vermittelst einer dreikantigen Ecke, deren Kantenwinkel 60°, 60°, 108° sind, als Gegenwinkel des letzten Kantenwinkels; sein Sinus ist rational, $\frac{2}{3}$, der Cosinus $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.**)

Hinsichtlich *des Verbindens der Ecken des Icosaeders zu Kanten* gilt Folgendes:

---

*) Vgl. Gugler, Lehrbuch der descriptiven Geometrie, 4. Aufl. (1880) S. 127, 130, 141.

**) Beim Octaeder hat die dreikantige Ecke die Kantenwinkel 60°, 60°, 90°; der Cosinus des Flächenwinkels ist $-\frac{1}{3}$. Beim Tetraeder ist er $\frac{1}{3}$.



Von jeder Ecke des Grunddreiecks in ϵ (in der ersten Stellung) gehen, ausser dessen beiden Seiten, noch 3 Kanten aus: zwei nach der Ebene φ und eine nach φ', welche sich am stärksten in Π_1 verkürzt, wie wir sahen, in die Differenz $r' - r$. Von jeder Ecke in φ gehen zwei nach ϵ, zwei nach φ' und eine nach ϵ'; und ähnliches gilt für ϵ' und φ'.

111. Man nennt Dodecaeder und Icosaeder zu einander *reciprok* oder *dual*; d. h. jenes hat so viele Ecken (12), bezw. Flächen (20), als dieses Flächen, bezw. Ecken kat; beide haben gleich viele Kanten (30); ferner hat das Icosaeder in einer Fläche so viele Ecken und Kanten (3), als beim Dodecaeder durch eine Ecke Flächen und Kanten gehen; und beim Icosaeder gehen durch eine Ecke so viele Flächen und Kanten (5), als beim Dodecaeder Ecken und Kanten in einer Fläche liegen.

In ähnlicher Beziehung stehen Hexaeder und Octaeder, während das Tetraeder sich selbst dual ist.

Mit dieser Erkenntniss meldete sich bei Maurolycus und nochmals bei Kepler das *Princip der Dualität oder Reciprocität* an; aber erst zwei Jahrhunderte später kam man wieder darauf zurück, und nun erkannte man auch bald die grosse Bedeutung dieses die ganze Geometrie beherrschenden Gesetzes. *Durch dasselbe wird jedem Satze, der es nur mit Lageneigenschaften zu thun hat, ein anderer gegenüber gestellt, in dem Punkt und Ebene ihre Rolle vertauschen, während die Gerade wieder in eine Gerade übergeht,* neben die Geometrie, in der der Punkt das Grundelement der Betrachtung ist, eine andere Geometrie gestellt, in welcher die Ebene dies Grundelement ist.

Wir begnügen uns hier, eine Anzahl von elementaren Sätzen einander dual gegenüberzustellen.

Auf einer Gerade liegen ∞^1 Punkte.	Durch eine Gerade gehen ∞^1 Ebenen.
In einer Ebene liegen ∞^2 Punkte und ∞^2 Geraden.	Durch einen Punkt gehen ∞^2 Ebenen und ∞^2 Geraden.
Im Raume giebt es ∞^3 Punkte.	Im Raume giebt es ∞^3 Ebenen.
Zwei Punkte bestimmen eine Gerade.	Zwei Ebenen bestimmen eine Gerade.
Eine Gerade und eine Ebene bestimmen im allgemeinen einen Punkt, der ihnen gemeinsam ist. Es giebt ∞^1 Geraden in der Ebene, welche die Gerade treffen; sie gehen durch diesen Punkt.	Eine Gerade und ein Punkt bestimmen im allgemeinen eine Ebene, die ihnen gemeinsam ist. Es giebt ∞^1 Geraden durch den Punkt, welche die Gerade treffen; sie liegen in dieser Ebene.

Wenn eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, so liegt sie ganz in ihr und hat alle ihre ∞^1 Punkte mit ihr gemeinsam.

Wenn eine Gerade mit einem Punkte zwei Ebenen gemeinsam hat, so enthält sie ihn und hat alle ihre ∞^1 Ebenen mit ihm gemeinsam.

Drei Ebenen bestimmen einen Punkt, der ihnen gemeinsam ist.

Drei Punkte bestimmen eine Ebene, die ihnen gemeinsam ist.

Zwei Geraden derselben Ebene bestimmen einen Punkt.

Zwei Geraden durch denselben Punkt bestimmen eine Ebene.

Durch einen Punkt geht eine Gerade, welche zwei gegebene Geraden trifft; sie ist die Schnittlinie der Ebenen, die ihn mit denselben verbinden.

In einer Ebene liegt eine Gerade, welche zwei gegebene Geraden trifft; sie verbindet deren Schnittpunkte mit der Ebene.

n Punkte haben $\frac{1}{2} n(n-1)$ Verbindungslinien und

$$\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$$

Verbindungsebenen.

n Ebenen haben $\frac{1}{2} n(n-1)$ Schnittgeraden und

$$\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$$

Schnittpunkte.

Nur wenn parallelen Geraden und Ebenen unendlich ferne gemeinsame Elemente zugeschrieben werden, sind durchweg beide Sätze in gleicher Weise *ausnahmslos* richtig.

b) Ebene Schnitte von Polyedern.

112. Ueber ebene Schnitte von Pyramiden und Prismen soll ausführlich gesprochen werden. Bei andern Polyedern wird man, um den ebenen Schnitt am schnellsten und sichersten zu erhalten, *mit einer Projectionsebene* Π_3 arbeiten, *die zu einer der gegebenen*, Π_1, *und zur schneidenden Ebene* E *senkrecht ist.* Die Schnittfigur projicirt sich dann in dieser Ebene auf die dritte Spur von E. Man wird also sofort erkennen, ob überhaupt ein Schnitt zu Stande kommt und, wenn das der Fall ist, welche Kanten und Flächen geschnitten werden. Die dritte Projection des Schnitts, aus der die andern Projectionen durch Lothen sich ergeben, besteht aus zwei übereinander gelegten gleichen Strecken der dritten Spur, in die eine projicirt sich der sichtbare Theil der Schnittfigur, in die andere der unsichtbare; wobei die Richtung, in der auf Π_3 gesehen wird, willkürlich gewählt werden kann; die Entscheidung über Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit erfolgt aus scheinbaren Schnitten in Π_3 durch Lothen nach Π_1 (Nr. 107). Die Aufeinanderfolge der Schnitte der dritten Spur mit sichtbaren inneren Kanten,

einer Umrisskante, unsichtbaren inneren Kanten, der andern Umrisskante lehrt die Aufeinanderfolge der Ecken der Schnittfigur. Andererseits ist ja auch klar, dass benachbarte Ecken der Schnittfigur nur auf Kanten liegen können, welche derselben Seitenfläche des Polyeders angehören, und benachbarte Seiten der Schnittfigur in benachbarten Seitenflächen.

In Fig. 51 (Taf. III) ist sie $\mathfrak{ABCDEF}$. In ihr ist die zweite Projectionsebene parallel verschoben (Nr. 96), und das Lothen musste wegen schiefen Schnitts bisweilen durch Proportionalconstruction oder Benutzung der dritten Projection ersetzt werden.

Will man ohne Anwendung einer dritten Projectionsebene arbeiten, so ist nicht leicht zu erkennen, welche Kanten geschnitten werden, nämlich zwischen ihren begrenzenden Ecken. Man kann mit den ersten Versuchen verunglücken. Hat man eine Kante getroffen, welche von der Ebene E zwischen den Ecken geschnitten wird, so wird man nun besser E mit einer der beiden Seitenflächen, zu denen sie gehört, schneiden, durch die Schnittlinie die zweite getroffene Kante dieser Fläche bestimmen, dann über diese zur andern Nachbarfläche übergehen, und so weiter. Man hat am Schlusse die Controlle, dass durch den Ausgangs-Schnittpunkt die letzte zu construirende Schnittlinie gehen muss. Aber diese Construction dürfte doch im allgemeinen weniger empfehlenswerth sein, als die vorangehende, obwohl dieselbe die Herstellung der dritten Projection des Polyeders fordert.

Man kann aber auch das Polyeder und E drehen, bis diese Ebene zu einer der gegebenen Projectionsebenen senkrecht ist, nun den Schnitt construiren und dann zurückdrehen.

Sichtbare Seiten der Schnittfigur liegen natürlich in sichtbaren Seitenflächen des Polyeders. Es tritt eine Modification ein, wenn man den einen Theil des Polyeders weggenommen denkt; wodurch manche Bedeckungen und scheinbaren Schnitte in Wegfall kommen.

113. Von unvergleichlich höherem theoretischen Interesse sind *die ebenen Schnitte von Pyramiden und Prismen.* Dabei wollen wir aber annehmen, dass wir es nur mit den Mänteln derselben zu thun, bei den Pyramiden mit *beiden* Halbmänteln, und dass keine Begrenzung durch die Grundfläche stattfinde. Der Umfang derselben ist uns nur *Leitfigur*, an der eine nach beiden Seiten hin unendlich lange Gerade, die ständig durch einen festen Punkt geht, hingleitet und dabei mit ihren beiden Halbstrahlen die beiden Halbmäntel der Pyramide beschreibt. Beim Prisma ist der Punkt unendlich fern, die bewegliche Gerade bleibt sich parallel. Nennen wir *Erzeugenden* (oder Mantellinien) die verschiedenen Lagen der Gerade.

Wir könnten die Leitfigur auch uneben annehmen, aber wir beschränken uns auf den Fall einer *ebenen* Figur; ihre Ebene sei E, während Φ die schneidende Ebene ist; s sei die Schnittlinie EΦ, O die Pyramidenspitze, bezw. l irgend eine Gerade von der Richtung der Erzeugenden des Prismas, also O unendlich fern auf ihr. Es erhellt sofort, dass *wir jede der beiden Figuren als Projection der andern aus O ansehen können; sie sind entsprechende Figuren in zwei Feldern in E und Φ, welche sich in der eindeutigen Beziehung befinden, die wir in* Nr. 6 *perspective Lage genannt haben.* Jedem Punkte, jeder Gerade der einen Ebene entspricht ein Punkt, eine Gerade der andern, und zwar, wie wir nunmehr sagen können, ausnahmslos, wofern wir unendlich ferne Elemente zulassen: wir werden uns gleich genauer darüber orientiren, wenn wir es mit solchen zu thun haben.

Jede zwei entsprechenden Punkte sind durch einen Strahl des Bündels O verbunden und ebenso zwei entsprechende Geraden durch eine Ebene desselben; in dem Punkte, in welchem diese die Gerade s trifft, begegnen sie sich und sind daher, wenn sie etwa zu s parallel ist, beide zu s parallel, was wir aber nicht mehr besonders zu erwähnen brauchen. *Wenn ein Punkt des einen Feldes auf einer Gerade desselben liegt, so gilt dasselbe für die entsprechenden Elemente des andern Feldes;* beschreibt daher in jenem der Punkt eine Punktreihe, der Strahl einen Strahlenbüschel, so verhält sich das entsprechende Element ebenso.

114. Im Falle O endlich ist, legen wir (Fig. 53) durch diesen Punkt die Parallelebenen E* und Φ* zu E und Φ; jede dieser Ebenen ist Verschwindungsebene, wenn die parallele Ebene als Projectionsebene angesehen wird. Indem wir zunächst den allgemeinen Fall annehmen, dass E und Φ nicht parallel sind, so erhalten wir endliche Schnittlinien $j =$ EΦ*, $i' =$ ΦE*, welche zu s und zu einander parallel sind. Wir erinnern uns (Nr. 5): wenn in E zwei Geraden a, b parallel sind, so fällt die Schnittlinie der beiden Ebenen Oa, Ob, weil sie zu ihnen parallel ist, in die Ebene E*, ihr Schnittpunkt mit Φ, in dem sich die beiden entsprechenden Geraden a', b' begegnen, also auf i'; und umgekehrt, bei zwei Geraden a', b' in Φ, die sich auf i' schneiden, fällt die nach diesem Schnittpunkt gehende Schnittlinie der beiden Ebenen Oa', Ob' in die Ebene E*, ist also parallel zu E, und diese Ebenen schneiden in E zwei Geraden a, b ein, die ihr und einander parallel sind.

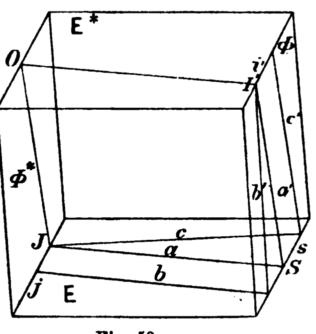


Fig. 53.

Somit hat jeder unendlich ferne Punkt von E seinen entsprechenden in Φ auf i', und jeder von i' seinen entsprechenden im Unendlichen; und indem sonst den Punkten einer Gerade die Punkte einer Gerade entsprechen, sehen wir, dass, wenn das ausnahmslos richtig sein soll, *wir die unendlich fernen Punkte von* E *als in einer Gerade liegend aufzunehmen haben*: der unendlich fernen Gerade von E, und die parallele Ebene E* ist die Ebene durch O, welche sie mit der correspondirenden i' verbindet; diese uneigentliche Gerade heisst dem entsprechend i_∞. Und in gleicher Weise entsprechen den unendlich fernen Punkten von Φ die Punkte von j in E, also diese Gerade der unendlich fernen Gerade j'_∞ von Φ. Wie wir schon früher Punkte, welche durch Centralprojection unendlich fernen Punkten oder Richtungen correspondiren, Fluchtpunkte genannt haben, so nennen wir Geraden, deren entsprechende unendlich fern sind, *Fluchtgeraden.* Jedes unserer beiden Felder E, Φ hat eine Fluchtgerade j, bezw. i'; sie sind parallel zu s, und der parallelopipedische Raum, den E, Φ, E*, Φ* einschliessen, lehrt, dass *die Entfernung von O nach der einen Fluchtgerade in Grösse, Richtung und Sinn übereinstimmt mit derjenigen von der andern zur Schnittlinie s.*

Wenn eine Gerade a in E die s in S und die j in J trifft, so geht die entsprechende a' in Φ durch S und nach dem unendlich fernen Punkte von OJ, der dem J entspricht, ist daher zu OJ parallel; wie dies auch die Ebene Oaa' beweist, welche Φ* in OJ schneidet und daher Φ in einer Parallele. Trifft nun a' die i' in I', so ist ebenso OI' zu a parallel.

Man beweise, dass jeder Parallele in E zu j und s eine Parallele zu i' und s entspricht und umgekehrt; der Richtung von s entspricht kein endlicher Punkt in der andern Ebene, sondern wieder eine Richtung, und zwar sie selbst. Aber das ist nur ein besonderer Fall davon, dass *jeder Punkt von s sich selbst entspricht,* wie unmittelbar einleuchtet, und dass zwei entsprechende Geraden sich immer auf s begegnen, also auch zwei entsprechende Figuren.

115. Das Fünfeck $ABCDE$ in E, das wir als Grund- oder Leitfigur der Pyramide annehmen wollen (Fig. 54), werde von der Fluchtgerade j der Ebene E in den Punkten K und L auf den Seiten AB und DE getroffen; so dass die Ebene Φ* den Mantel in den beiden Erzeugenden OK und OL schneidet; sie sind der Ebene Φ parallel und ihre Schnitte mit ihr, die den Punkten K, L entsprechenden Punkte, sind unendlich fern (in der Richtung von OK, OL). Der Schnitt $A'B'C'D'E'$ hat infolge dessen nur drei Seiten $B'C'$, $C'D'$, $E'A'$ von endlicher Länge; *die beiden andern Seiten sind nicht die endlichen*

*Theile $A'B'$, $D'E'$, sondern die unendlich langen Theile von A' über den unendlich fernen Punkt K'_∞ nach B' und ebenso von D' über L'_∞ nach E'.**) Das Innere des Schnitts, welches wie das Innere von $ABCDE$ die concaven Winkel enthält, besteht aus zwei unendlich grossen Theilen $\mu' = L'_\infty D'C'B'K'_\infty$, $\nu' = K'_\infty A'E'L'_\infty$, welche den beiden (offenen) Theilen $\mu = LDCBK$ und $\nu = KAEL$ entsprechen, in die das Innere von $ABCDE$ durch j getheilt wird; und wie die Umfänge dieser in K und L und sie selbst in der Strecke KL der Gerade j zusammenhängen, so *hängen*, nach der perspectiven Ansicht, *die beiden Theile von $A'B'C'D'E'$ in K'_∞, L'_∞ und die beiden Theile μ', ν' des Innern in der unendlich fernen Strecke $K'_\infty L'_\infty$ zusammen.* Die beiden Theile von $A'B'C'D'E'$ befinden sich auf den beiden Halbmänteln der Pyramide, die in der Spitze zusammenstossen. Lassen wir continuirlich eine Erzeugende an $ABCDE$ hingleiten, so trifft sie Φ mit dem dem einen Halbmantel angehörigen Halbstrahle, so lange sie sich auf den Theil $LDCBK$ stützt, und erzeugt den Theil $L'D'C'B'K'$; kommt sie nach OK, so wird sie zu Φ parallel und trifft im Unendlichen; stützt sie sich nunmehr auf den Theil $KAEL$, so trifft sie Φ mit ihrem dem andern Halbmantel angehörigen Halbstrahle und erzeugt den Theil $K'A'E'L'$, und über die Erzeugende OL kehrt man zum ersten Halbmantel zurück. Die continuirliche Bewegung der Erzeugenden veranlasst uns, *auch der Bewegung des Punktes, welcher den Umfang des Schnitts durchläuft, Continuität zuzuschreiben.*

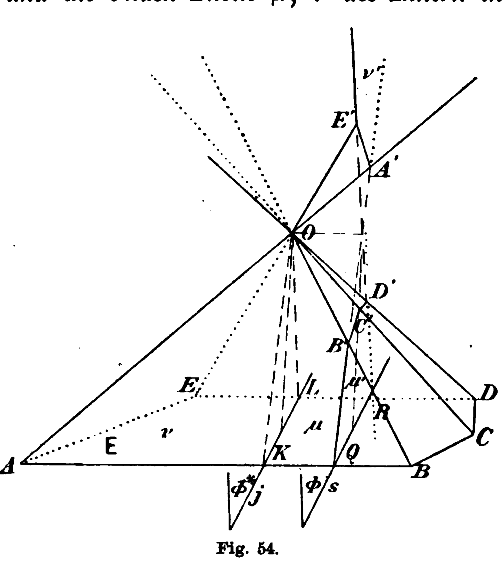


Fig. 54.

Enthält j nur einen Eckpunkt der Leitfigur, sie streifend, so geht dieser allein ins Unendliche und zwei benachbarte Seiten der Schnittfigur werden parallel; der Schnitt besteht hier nur aus einem Stücke. Schneidet endlich die Fluchtgerade j die Leitfigur gar nicht, dann ist die Schnittfigur ebenfalls eine im Endlichen geschlossene Figur.

*) Nach Staudt's Bezeichnung die Strecken $A' \cdot B'$, $D' \cdot E'$.

Je nachdem also die Ebene, welche durch den Scheitel einer Pyramide parallel zur Schnittebene gelegt ist, die Pyramide in zwei Erzeugenden durchschneidet und daher jeden der beiden Halbmäntel in zwei Theile theilt, oder sie nur längs einer Kante streift, oder endlich gar keine Erzeugende enthält, so dass in diesem und dem vorigen Falle die beiden Halbmäntel zu verschiedenen Seiten dieser Ebene liegen; d. h. je nachdem jene durch den Scheitel gelegte Ebene die Leitfigur zweimal trifft, oder nur eine Ecke von ihr enthält, oder sie gar nicht trifft, so besteht der Schnitt aus zwei ins Unendliche verlaufenden und dort zusammenhängenden Theilen oder er besteht nur aus einem Theile, hat aber zwei benachbarte parallele Seiten, oder ist eine im Endlichen geschlossene Figur.

116. Genau dieselben drei Fälle erhalten wir bei einem *Kegel*, der über einem *Kreise* steht; *je nachdem j diesen Kreis in zwei Punkten schneidet oder ihn nur berührt oder ihn gar nicht trifft und daher die Parallelebene durch den Scheitel zur Schnittebene den Kegel in zwei Erzeugenden schneidet, oder ihn berührt, oder nur durch die Spitze geht und gar keine Erzeugende enthält, ergeben sich die drei Curven, welche Kegelschnitte genannt werden:* im ersten Falle eine *Hyperbel*, welche aus *zwei Zweigen* besteht, *die beide nach denselben zwei verschiedenen Richtungen ins Unendliche verlaufen, der eine in den einen Sinnen, der andere in den entgegengesetzten, und in diesen zwei unendlich fernen Punkten zusammenhängen;* im zweiten Falle eine *Parabel*, die aus *einem Zweige* besteht, *der nach beiden Seiten in derselben Richtung und demselben Sinne ins Unendliche strebt;* im dritten Falle eine *Ellipse*.

Eine Tangente des Kreises geht in eine Tangente des Kegelschnitts über; seien im ersten Falle wieder K und L die Schnitte von j mit dem Kreise, k, l die zugehörigen Tangenten desselben; so gehen wohl K und L in unendlich ferne Punkte über, aber nicht k und l in unendlich ferne Geraden; denn sie sind verschieden von j, und nur diese Gerade in E wird unendlich fern. Die Tangentialebenen des Kegels, welche k und l enthalten und, weil durch O gehend, die entsprechenden Tangenten k', l' einschneiden, treffen Φ^* in OK, OL; also sind sie auch zu Φ nicht parallel, schneiden sie in eigentlichen Geraden. Wir erhalten *zwei Tangenten der Hyperbel, welche unendlich ferne Berührungspunkte haben, aber selbst endlich sind:* die sogenannten *Asymptoten* der Hyperbel. *Sie vermitteln den Uebergang von den Tangenten des einen Zweiges zu denen des andern.*

Haben sich K und L vereinigt, so dass j den Kreis berührt, so erhält die entsprechende Curve in j'_∞ eine Tangente. *Die Parabel berührt die unendlich ferne Gerade.*

Wenn man aber doch die Pyramide (Kegel) in der Spitze begrenzt annimmt, so wird dann natürlich ein Zweig des Schnitts, der dem fehlenden Halbmantel angehört, in Wegfall kommen. Schneidet die Ebene Φ die Leitfigur, so liegen die Schnittpunkte Q, R, als Punkt von s sich selbst entsprechend, auch auf der Schnittfigur, so dass, wenn man die Pyramide durch die Fläche der Leitfigur begrenzt denkt, ein Theil des Schnitts nicht vorhanden ist, und der im Innern der Pyramide befindliche zunächst offene Theil der Schnittfigur durch die Strecke QR geschlossen werden muss.

Theoretisch *kann man jede von zwei entsprechenden Figuren in* E, Φ *als Schatten der andern ansehen, der auf ihre Ebene durch Lichtstrahlen geworfen wird, welche von O kommen;* aber wirklicher Schatten ist nur ein solcher Punkt, der auf derselben Seite und weiter vom leuchtenden Punkt entfernt liegt, als der, welcher Schatten wirft. Wenn z. B. ein Kreis auf eine Wand Schatten wirft, der leuchtende Punkt aber so liegt, dass die Parallelebene durch ihn zur Wand den Kreis in zwei Theile theilt, so *kommt als Schatten nur der eine Hyperbelzweig zu stande.*

117. *Lassen wir nun O unendlich fern werden,* also Pyramide (Kegel) in Prisma (Cylinder) übergehen, die Centralprojection, durch welche jedes der beiden Felder E, Φ ins andere übergeführt wird, in Parallelprojection; während E und Φ nach wie vor als nicht parallel angenommen werden. *Dann entspricht jedem endlichen Punkte ein endlicher* (Nr. 7). Endliche Fluchtgeraden j und i' können also nicht vorhanden sein. In der That, wenn sich O entfernt, so entfernen sich auch j und i', sich parallel verschiebend, immer weiter, da die Ebenen Φ* und E* es thun, und, wenn O unendlich fern geworden ist, so sind sie in *die unendlich fernen Geraden von* E, Φ gelangt; *jede von diesen hat die andere zur entsprechenden:* jedem unendlich fernen Punkt oder jeder Richtung des einen Feldes entspricht ein unendlich ferner Punkt, eine Richtung in dem andern, parallelen Geraden entsprechen parallele Geraden.

Ist die Leitfigur eines prismatischen Mantels eine im Endlichen geschlossene Figur, so gilt dasselbe für jeden ebenen Schnitt. Jeder Cylinder über einem Kreise hat keine andern ebenen Schnitte als im Endlichen geschlossene, Ellipsen; oder die Parallelprojection eines Kreises ist immer eine Ellipse.

Wenn aber die Ebenen E, Φ *parallel sind und O endlich ist,* so sind zwei entsprechende Geraden parallel, als Schnitte einer Ebene durch O mit den parallelen Ebenen E, Φ; sie treffen sich im Unendlichen: auf der in diesem Falle unendlich fernen Schnittlinie s. *Diese*

gemeinsame unendlich ferne Gerade entspricht sich selbst; also können wir auch nicht endliche Fluchtgeraden haben; und in der That, die beiden Parallelebenen E*, Φ* durch O sind in dieselbe durch O zu E, Φ parallele Ebene zusammengefallen, und s_∞ ist sowohl Schnitt $j = \mathrm{E}\Phi^*$, als Schnitt $i' = \Phi\mathrm{E}^*$. Wenn jeder Gerade der einen Ebene eine parallele in der andern entspricht, so entsprechen zwei parallelen Geraden zwei ebenfalls parallele von derselben Richtung; *jede Richtung entspricht sich selbst,* d. h. jeder Punkt von s_∞.

Entsprechende Figuren sind parallele Schnitte einer Pyramide oder eines Kegels, also *ähnlich; das Verhältniss entsprechender Strecken ist*

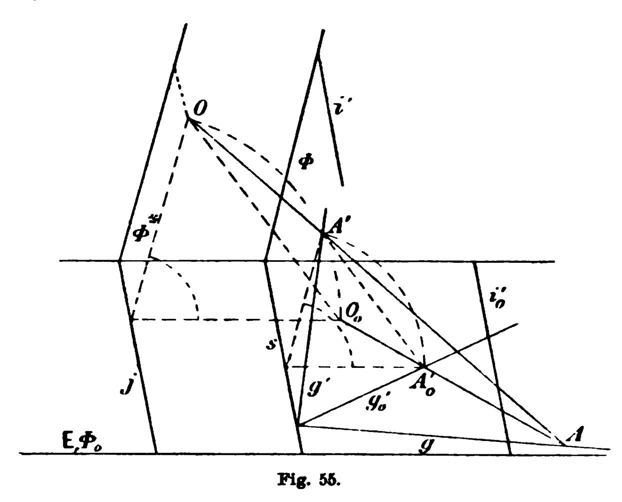


Fig. 55.

offenbar das der Entfernungen der beiden Ebenen von O. Diese Aehnlichkeit geht in Congruenz, dies Verhältniss in 1 *über, wenn auch O unendlich fern wird* und wir es mit parallelen Schnitten von Prismen oder Cylindern zu thun haben.

118. Wir wollen jetzt von den beiden in perspectiver Lage befindlichen Feldern das eine Φ um die Schnittlinie s drehen bis zur Vereinigung mit dem andern; wenn O endlich ist (Fig. 55), so werde dann gleichzeitig und in demselben Sinne auch die Parallelebene Φ* um $j = \mathrm{E}\Phi^*$ umgelegt in E. Die Punkte der beiden Ebenen beschreiben bei diesen Drehungen Kreisbögen in Ebenen, welche senkrecht auf s und j stehen und daher auch auf E und Φ, um die Schnitte dieser Ebenen mit s, bezw. j und mit gleichen Centriwinkeln, Neigungswinkeln der Ebenen Φ und Φ* gegen E. Man erhält ähnliche gleichschenklige Dreiecke mit parallelen Schenkeln, Normalen in E und Φ oder Φ* zu s oder j; also sind auch die Basen, die Sehnen dieser Kreisbögen, parallel. Daher sind die Umlegungen der Punkte $A', B', C' \ldots$

von Φ und des Punktes O von Φ^*, welche A_0', B_0', C_0', ..., O_0 heissen mögen, Parallelprojectionen dieser Punkte auf die Ebene E in der Richtung der Sehnen. Nun sind die Punkte A, A', O in gerader Linie gelegen, also auch ihre Projectionen A, A_0', O_0; ebenso B, B_0', O_0; ... Das Feld E und das Feld Φ_0, ebenfalls in E, die Umlegung von Φ, sind so bezogen, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte A und A_0', B und B_0', ... alle durch denselben Punkt O_0 laufen. Zwei entsprechende Geraden g und g' von E und Φ treffen sich auf s, dieser Punkt bleibt bei der Umlegung; also treffen sich auch zwei entsprechende Geraden g und g_0' von E und Φ_0 auf s. Und wenn in dem einen Felde ein Punkt auf einer Gerade liegt, so gilt es für die entsprechenden Elemente im andern; denn es ist richtig für E und Φ, und die Umlegung ändert daran nichts. Diese Beziehung heisst, wie wir schon in Nr. 23 erwähnten, *Homologie*, O_0 das *Centrum* und s die *Axe* der Homologie.

Wird also das eine von zwei Feldern, welche in perspectiver Lage sind, durch Drehung um die Schnittlinie mit dem andern vereinigt, so erhält man zwei Felder (derselben Ebene), welche in Homologie sind: Axe der Homologie, d. i. die Gerade, auf welcher durchweg entsprechende Geraden sich schneiden, ist die Schnittlinie, Centrum der Homologie, d. i. der Punkt, in den die Verbindungslinien entsprechender Punkte zusammenlaufen, ist der Punkt, in den sich das Centrum, durch welches die perspective Lage erzielt wird, legt, wenn es mit der Parallelebene zur umgelegten Ebene in demselben Drehsinne umgelegt wird.

Geraden von E, die sich in einem Punkte J von j schneiden, entsprechen in Φ parallele Geraden von der Richtung OJ, also in Φ_0 parallele Geraden von der Richtung O_0J. *Daher ist j auch in der Beziehung zwischen E und Φ_0 der unendlich fernen Gerade von Φ_0 entsprechend oder Fluchtgerade in* E. Ebenso entsprechen parallelen Geraden von E in Φ Geraden, die sich auf i' in I' schneiden, also in Φ_0 Geraden, welche sich *auf* i_0' schneiden, *der Umlegung von i', welche somit Fluchtgerade von Φ_0 wird.* Aus dem Satze von Nr. 114 über die gegenseitige Lage von s, j, i', O schliessen wir hier für s, j, i_0', welche auch parallel sind, und O_0, dass *ebenfalls die Entfernung von s nach j (oder i_0') in Grösse und Sinn übereinstimmt mit derjenigen von i_0' (oder j) nach O_0.*

Sind daher Axe, Centrum und die eine Fluchtgerade gegeben, so ist die andere leicht zu construiren. Hat man eine Gerade g in E, welche s, j in S, J schneidet, so geht g_0' durch S und ist zu O_0J parallel; denn $J'_{\infty,0}$ liegt auf g_0' und andererseits mit J und O_0 in gerader Linie. Man zeige, dass, wenn g_0' die i_0' in I_0' trifft, g zu O_0I_0' parallel

ist. Wenn ein Punkt P in E gegeben ist, so liegt der entsprechende P_0' auf O_0P und, wenn g eine durch P gehende Gerade ist, auf g_0'.

Ist O unendlich fern, so haben wir, wie schon in Nr. 23 gesagt (und für den Fall, dass die Projectionsstrahlen auf E normal sind, bewiesen) wurde, *Affinität, d. h. parallele Verbindungslinien entsprechender Punkte* oder unendlich fernes Centrum. In der That, dann sind die AA', BB',... parallel und werden in der Richtung der oben genannten Sehnen, die ja von O unabhängig sind, in parallele Geraden AA_0', BB_0',... projicirt.

119. Wir schliessen hieran die Behandlung der Sätze über *zwei perspective Dreiecke im Raume und in der Ebene. Liegen zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ in verschiedenen Ebenen perspectiv, d. h. so, dass AA', BB', CC' durch einen Punkt O gehen, so* sind sie entsprechende Figuren in perspectiv gelegenen Feldern, also *treffen sich die entsprechenden Seiten BC und $B'C'$, CA und $C'A'$, AB und $A'B'$ auf der Schnittlinie s der beiden Ebenen.* Umgekehrt, *wenn die Seiten zweier Dreiecke ABC, $A'B'C'$, welche in verschiedenen Ebenen liegen, diese Eigenschaft haben, dass ihre entsprechenden Seiten sich schneiden und dann nothwendig auf der Schnittlinie, so laufen die Verbindungslinien entsprechender Ecken in einen Punkt zusammen;* denn wir haben drei Ebenen $\alpha = (BC, B'C')$, $\beta = (CA, C'A')$ und $\gamma = (AB, A'B')$. In dem gemeinsamen Punkte derselben schneiden sich ihre drei Schnittlinien $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$; aber auf $\beta\gamma$ liegen A und A', auf $\gamma\alpha$: B und B', auf $\alpha\beta$: C und C'. — Wenn die Ebenen parallel sind, so heisst das Schneiden auf der Schnittlinie, dass die entsprechenden Seiten parallel sind.

Aber auch bei zwei Dreiecken ABC, $A'B'C'$ derselben Ebene, welche so liegen, dass die entsprechenden Seiten sich auf einer Gerade s (Axe) begegnen, laufen die Verbindungslinien entsprechender Ecken in einen Punkt (Centrum) zusammen; denn dreht man das eine um s aus der Ebene heraus, so findet die räumliche perspective Lage statt, da die Drehung an dem Schneiden auf s nichts ändert; also besteht nach Nr. 118 das Zusammenlaufen auch, wenn wieder die Vereinigung der Ebenen hergestellt wird.

Diesen ebenen Satz benutzt man, um eine oft vorkommende Aufgabe zu lösen, nämlich (Fig. 56) *nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier Geraden a, b aus einem gegebenen Punkte C die Gerade zu ziehen.* Man legt auf a die Punkte A, A', auf b: B, B'; durch den Punkt $\mathfrak{C} = (AB, A'B')$ zieht man die Gerade s, die von CA, CB in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ geschnitten werde; ist dann C' der Schnitt von $A'\mathfrak{B}$ und $B'\mathfrak{A}$, so genügen ABC, $A'B'C'$ der Voraussetzung des Satzes, und CC' geht durch (AA', BB') *ab*. Natürlich muss man die Punkte und die Gerade s so

wählen, dass die erwähnten Schnitte zu stande kommen und scharf werden, so wie dass C' nicht zu nahe an C zu liegen kommt, weil dann die gesuchte Gerade nicht genau genug bestimmt wäre. Am einfachsten und exactesten verfährt man, wenn man $\mathfrak{C}$ und s unendlich fern nimmt, wodurch auch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ unendlich fern werden; die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ haben dann parallele entsprechenden Seiten und sind ähnlich und ähnlich gelegen (man vergl. die Bemerkung in Nr. 65).

Den Umkehrungssatz: *Wenn zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ derselben Ebene so liegen, dass AA', BB', CC' durch einen Punkt O gehen, so*

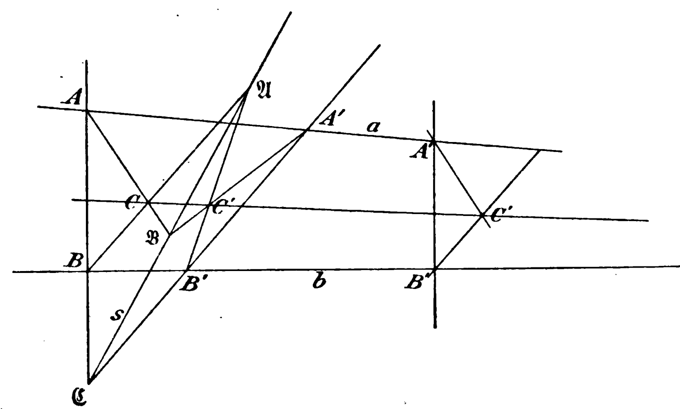


Fig. 56.

liegen die drei Schnittpunkte $\mathfrak{A} = (BC, B'C')$, $\mathfrak{B} = (CA, C'A')$, $\mathfrak{C} = (AB, A'B')$ in gerader Linie, kann man, durch andere Auffassung der Figur, in den Satz, von dem er die Umkehrung ist, umwandeln. Bei den beiden Dreiecken $AA'\mathfrak{B}$, $BB'\mathfrak{A}$ nämlich liegen die Schnitte entsprechender Seiten $(AA', BB') = O$, $(A\mathfrak{B}, B\mathfrak{A}) = C$, $(A'\mathfrak{B}, B'\mathfrak{A}) = C'$ in gerader Linie; also gehen AB, $A'B'$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ durch denselben Punkt, oder, was dasselbe ist, der Punkt $\mathfrak{C} = (AB, A'B')$ liegt auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, und das ist die Behauptung des Umkehrungssatzes.

120. Kehren wir zu den beiden Feldern in E und Φ, die in perspectiver Lage sich befinden bei endlichem Perspectivitätscentrum O oder unendlich fernem auf l, zurück, um sie orthogonal auf eine unserer Projectionsebenen, zunächst auf Π_1 zu projiciren; wir bevorzugen diesen für uns wichtigsten Fall der Parallelprojection, fordern jedoch den Leser auf, sich bei jedem Ergebnisse zu vergegenwärtigen, ob es auch für schräge Parallelprojection richtig ist.

Weil entsprechende Punkte P, P' in E, Φ stets auf einer Gerade durch O oder einer Parallele zu l liegen, entsprechende Geraden g, g'

sich stets auf s schneiden, so gehen die Verbindungslinien $P_1 P_1'$ stets durch O_1 oder sind zu l_1 parallel, die Schnittpunkte $g_1 g_1'$ liegen auf s_1. Wenn P_1 auf g_1 liegt, so liegt P auf g, also P' auf g' und P_1' auf g_1', und ebenso umgekehrt. Daraus erhellt: *Zwischen den ersten Projectionen* E_1, Φ_1 *zweier Felder* E, Φ *in perspectiver Lage besteht Homologie, im Falle* O *endlich ist oder im Falle der Pyramide,* wenn wir wieder auf die Ausgangsbetrachtung (Nr. 113) zurückkommen, *Affinität, wenn* O *unendlich fern ist oder im Falle des Prismas. Axe der Homologie oder Affinität ist die Projection der Schnittlinie* $\mathsf{E}\Phi$, *Centrum der Homologie ist die Projection des Perspectivitätscentrums* O *oder der Pyramidenspitze, die Affinitätsstrahlen haben die Richtung der Projectionen der Prismenkanten.*

Parallelen Geraden a, b von E entsprechen im ersten Falle sich auf i' schneidende in Φ; jene haben parallele Projectionen in Π_1, diejenigen dieser schneiden sich auf i_1'.

Die Fluchtgeraden j *und* i' *von* E, Φ *projiciren sich in die Fluchtgeraden* j_1', i_1' *von* E_1, Φ_1, und die Uebereinstimmung der Entfernungen sj und $i'O$ (oder si' und jO) in Grösse und Sinn geht ersichtlich in die Projection über.

Ebenso erhält sich, wenn E und Φ parallel sind, der Parallelismus entsprechender Geraden, die Aehnlichkeit (bezw. Congruenz) entsprechender Figuren in der Projection.

Was für Π_1 gilt, gilt ebenso für Π_2; *zu den Homologien (oder Affinitäten) zwischen* E_1 *und* Φ_1, E_2 *und* Φ_2 *treten nun noch zwei Affinitäten hinzu* (Nr. 67), *die zwischen* E_1 *und* E_2 *und die zwischen* Φ_1 *und* Φ_2.

Weil s in E und Φ liegt, so sind s_1 und s_2 entsprechende Geraden in diesen beiden Affinitäten; also treffen sie sich auf deren Axen $m_{12,\mathsf{E}}$, $m_{12,\Phi}$. Folglich gehen die Axen s_1, s_2, $m_{12,\mathsf{E}}$, $m_{12,\Phi}$ aller vier Beziehungen oder Verwandtschaften, mit denen wir hier zu thun haben, durch denselben Punkt.

121. *Ein ebenes Fünfeck* $ABCDE$ *in der Ebene* E, *durch seine Projectionen in* Π_1, Π_2 *dargestellt, sei* nach Nr. 68 oder 69 *hergestellt* (Fig. 57, Taf. IV). *Ueber ihm sei eine Pyramide mit der Spitze* O *errichtet; es sollen die Projectionen ihres Schnitts* $A'B'C'D'E'$ *mit einer Ebene* Φ *construirt werden;* diese sei durch ihre Spuren gegeben. Wir ermitteln zuerst die Schnittlinie $s = \mathsf{E}\Phi$, Geraden der Ebene E mit Φ schneidend; dann construiren wir die Parallelebene Φ^* durch O zu Φ (mit Hilfe einer Spurparallele) und die Schnittlinie $j = \mathsf{E}\Phi^*$; dass $j \parallel s$, wird besser als Controlle benutzt. Die andere Fluchtgerade i' ist nun nach dem obigen Satze sofort hinzuzufügen. Wir legen durch A_1 eine

Gerade x_1 (zu E_1 gehörig), welche s_1 und j_1 in S_1 und J_1 treffe; die entsprechende Gerade x_1' in Φ_1 geht durch S_1 und ist zu $O_1 J_1$ parallel; von dem durch A_1 gehenden Homologiestrahle durch das Centrum O_1 wird sie in A_1' getroffen. Ist I_1' der Schnitt von x_1' mit i_1', so muss $O_1 I_1'$ zu x_1 parallel sein. In ähnlicher Weise werden B_1', C_1', ... construirt; es empfiehlt sich die Hilfsgeraden, wie x_1, alle nach demselben Punkte J_1 von j_1 zu ziehen, weil dann die x_1' parallel werden und zugleich gezogen werden können. Als weitere Controlle haben wir das Schneiden der entsprechenden Seiten (und Diagonalen) von $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ und $A_1' B_1' C_1' D_1' E_1'$ auf s_1.

Da man s_2, j_2, O_2 (und i_2') schon besitzt, so kann man nun ganz ebenso in Π_2 verfahren, gewissermassen unabhängig von Π_1; die Normalität zur Axe der Verbindungslinien zusammengehöriger Projectionen dient als Controlle, oder allgemeiner die Affinität zwischen Φ_1 und Φ_2, insbesondere das Schneiden der Projectionen derselben Gerade in Φ auf der Axe dieser Affinität. Andererseits empfiehlt es sich, eine oder die andere Ecke von $A'B'C'D'E'$ als Schnittpunkt der Ebene Φ mit einer Kante der Pyramide nach Nr. 63 zu ermitteln, so dass man eine reiche Fülle von Controllen zur Verfügung hat. In Fig. 57 ist der Fall behandelt, wo die Fluchtgerade j die Figur $ABCDE$ nicht durchschneidet und daher $A'B'C'D'E'$ eine ebenfalls im Endlichen geschlossene Figur ist.

122. Wir wollen noch den besondern Fall betrachten, dass *die Ebene* E *mit einer der Projectionsebenen identisch ist*, etwa mit Π_1; s und j sind dann die ersten Spuren von Φ und Φ^*; E_1 deckt sich mit E. *Wir haben zwei Homologien und eine Affinität. Die erste Homologie besteht zwischen* E *und* Φ_0, *der Umlegung von* Φ (Nr. 118); *die zweite Homologie besteht zwischen* $E = E_1$ *und* Φ_1 (Nr. 120), *die Affinität zwischen* Φ_1 *und* Φ_0 (Nr. 23). *Für alle Beziehungen ist* s *die Axe, die erste Homologie hat* O_0, *den mit* Φ^* *um* j *umgelegten Punkt* O, *zum Centrum, die zweite* O_1, *die Richtung der Affinitätsstrahlen ist senkrecht zu* s. Die Leit- oder Grundfigur der Pyramide in Π_1 sei $ABCD$ (Fig. 58, Taf. IV). Man kann $A_0' B_0' C_0' D_0'$ und $A_1' B_1' C_1' D_1'$ gleichzeitig construiren. Geht z. B. wieder c durch C mit den Schnittpunkten S, J auf s, j, so sind c_0', c_1' durch S parallel zu $O_0 J$, $O_1 J$ zu ziehen und mit $O_0 C$, $O_1 C$ in C_0', C_1' zu schneiden; es empfiehlt sich wiederum den J, so lange er nicht zu ungünstigen Schnitten führt, beizubehalten; Controlle ist, dass $C_0' C_1'$ zu s normal sein muss. Am werthvollsten als J ist, falls er nicht zu schleifenden Schnitten führt, der Schnitt von $O_0 O_1$ mit j, weil dann die beiden Richtungen von Parallelen übereinstimmen und derselbe Strahl (senkrecht zu s) durch S in $O_0 C$ und

$O_1 C$ die entsprechenden Punkte C_0', C_1' einschneidet. Die dann verloren gehende Controlle kann man hinreichend durch andere ersetzen, wie dass z. B. $B_0'C_0'$, $B_1'C_1'$ und BC alle durch denselben Punkt von s gehen müssen, was man natürlich auch für die Construction benutzen kann.

Die zweite Projection von $A'B'C'$ wird man möglichst durch Lothen herstellen, und die Affinität zwischen Φ_1 und Φ_2 kann zur Controlle oder Construction benutzt werden; diejenige aber zwischen E_2 und Φ_2 fällt hier weg, weil die zweite Projection von E kein Feld, sondern eine Gerade, die Projectionsaxe ist. Man controllire z. B. auch, dass die Schnitte $(s, BC) = (s, B_1'C_1') = (s, B_0'C_0')$ und $(a, B_2'C_2')$ Projectionen desselben Punktes, der ersten Spur von $B'C'$ sind; oder ermittele die zweiten Ordinaten aus Umlegungsdreiecken, dies insbesondere, wenn das Lothen zu schleifenden Schnitten führt, oder benutze Spurparallelen, wie es in der Figur geschehen ist. Andererseits wird man auch einige Ecken als Schnittpunkte von Φ mit Kanten herstellen.

Sobald es sich um ein Prisma handelt, wird man, weil j nicht vorhanden ist, eine Ecke, etwa A', so construiren müssen (dies gilt auch für Nr. 121) und zwar A_1', A_2' und A_0'; die drei Richtungen der Affinitätsstrahlen sind AA_0', AA_1', $A_0'A_1'$. Die Affinitätsconstruction liefert dann B_0', B_1' und B_2'; u. s. w.

123. Die beiden Centren O_0, O_1 der Homologien liegen auf einer Senkrechte zur Axe s und das der Affinität unendlich fern in senkrechter Richtung zu s; also liegen alle drei in gerader Linie. Dies führt zu folgendem allgemeinen Satze:

Wenn zwei Felder derselben Ebene zu einem dritten so in Homologie sind, dass die Axe s gemeinsam ist, so stehen sie selbst in Homologie mit dieser Axe, und die drei Centren liegen in gerader Linie. In der That, es seien A'', B'', C'' drei nicht in gerader Linie liegende Punkte des dritten Feldes, denen A, B, C im ersten und A', B', C' im zweiten entsprechen. Daher treffen BC, CA, AB und $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ die Gerade s in den Punkten, in denen sie von $B''C''$, $C''A''$, $A''B''$ geschnitten wird. Also sind ABC und $A'B'C'$ perspectiv und AA', BB', CC' laufen in einen Punkt O_2 zusammen (Nr. 119), durch den auch die übrigen Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden ersten Felder gehen, da er durch AA', BB' schon bestimmt ist und C, C' ja durch jedes andere Paar ersetzt werden kann. Wenn A auf a liegt, so liegt A'' auf a'' wegen der ersten Homologie und A' auf a' wegen der zweiten; ebenso ungekehrt. Damit ist die Homologie zwischen den beiden ersten Feldern bewiesen. Liegt nun D'' auf der Verbindungslinie OO_1 der Centren der beiden ersten Homologien, so

sind auch D und D' auf derselben, als einem gemeinsamen Homologiestrahle, gelegen; und daher liegt auch das Centrum O_2 der neuen Homologie auf dieser Gerade, die als DD' Homologiestrahl für sie wird.

Sie geht ins Unendliche, wenn zwei der Homologien Affinitäten werden, und die dritte wird es daher auch.

c) Gegenseitige Schnitte von Polyedern.

124. Wir wenden uns zuerst zur Construction *des gegenseitigen Schnitts von Pyramiden und Prismen*, wobei wir dieselben wiederum weder durch die Spitze, noch durch die Leitfigur begrenzt denken.

Man durchschneidet beide Pyramiden durch Ebenen, welche aus ihnen Erzeugenden ausschneiden, also durch die Spitzen von beiden gehen, demnach bei einem Prisma den Erzeugenden (und Kanten) parallel sind. Alle diese Hilfsebenen gehen dann durch die Verbindungslinie der beiden Spitzen S und T, d. i. wenn eine der beiden Flächen ein Prisma ist, durch die Linie, welche von der Spitze der Pyramide parallel zu den Prismenkanten geht, nach der unendlich fernen Prismenspitze. Sind aber beide Flächen Prismen, so ist diese Linie ST, weil sie zwei unendlich ferne Punkte verbindet, ganz unendlich fern, die Hilfsebenen sind parallel, sind sie ja doch alle sowohl den Kanten des einen, als denen des andern Prismas parallel.

Es seien E und Φ die Ebenen, in denen sich die Leitfiguren σ und τ befinden, und k ihre Schnittlinie. Die E-Spuren der Hilfsebenen gehen alle durch den Punkt $U = (ST, \mathsf{E})$, die Φ-Spuren durch den Punkt $V = (ST, \Phi)$, und zusammengehörige Spuren treffen sich auf k. Wenn zwei Prismen vorliegen, befinden sich beide Punkte U, V in unendlicher Entfernung; und wir haben die Richtungen der einen und andern Spuren festzulegen. Dazu wird man durch irgend einen Punkt die Parallelen zu den einen und andern Prismenkanten ziehen und die verbindende Ebene mit E und Φ schneiden; jenen Punkt legt man am besten auf eine Kante.

Brauchbar sind von den Ebenen des Büschels um ST nur solche, welche beide Mäntel schneiden, deren Spuren in E und Φ also beiden Figuren σ, τ begegnen; nach diesen Schnittpunkten zieht man aus den Spitzen S und T die Erzeugenden a, b, bezw. c, d und schneidet jene mit diesen, wodurch sich vier Punkte des Schnitts ac, bc, ad, bd ergeben, welche, wenn alle brauchbaren Ebenen durchlaufen werden, die vollständige Schnittfigur erzeugen. Da dieselbe aus begrenzten Geraden besteht, so ist es nur nothwendig, die Eckpunkte der Figur zu er-

halten; und weil diese auf Kanten liegen, so reicht es hin, mit solchen Hilfsebenen zu arbeiten, welche durch Kanten des einen oder andern Mantels gehen, und kann man dann bei dem betreffenden Mantel auch die zweite Erzeugende, die nicht Kante ist, unbeachtet lassen und nur jene Kante mit den beiden aus dem andern Mantel geschnittenen Erzeugenden zum Schnitte bringen. Aber für die folgende Betrachtung brauchen wir alle vier Erzeugenden a, b, c, d.

Es können (sobald überhaupt ein Schnitt sich ergiebt) *drei Fälle eintreten.*

1) Es liege sowohl U innerhalb σ, als auch V innerhalb τ; dann schneiden *alle* Ebenen des Büschels die Mäntel, und indem man die Drehung um 180° vollzieht, um den ganzen Büschel zu durchlaufen, wobei auch die Spuren in E und Φ sich um 180° drehen, führt man, von einer Anfangslage ausgehend, die Erzeugenden a, b; c, d in b, a; d, c und also die Punkte ac, bd; ad, bc in die Punkte bd, ac; bc, ad über. Infolge dessen *besteht die Schnittfigur aus zwei getrennten Theilen*, von denen der eine durch die Punkte ac und bd, der andere durch ad und bc gebildet wird. *Jeder der beiden Mäntel wird von jeder Kante des andern getroffen; jeder durchdringt den andern.*

2) Wenn aber z. B. V ausserhalb τ liegt, so haben wir Φ-Spuren, welche τ streifen, d. h. durch eine Ecke von τ gehen, ohne einzutreten; die zugehörigen Ebenen τ_1, τ_2 des Büschels, („Grenzebenen") schliessen dann denjenigen Theil $\mathfrak{T}$ desselben ein, dessen Ebenen den Mantel (T, τ) durchschneiden.

a) Liegt U innerhalb σ, so durchschneiden alle diese Ebenen (S, σ). Alle Kanten von (T, τ) treffen (S, σ), aber es wird nicht umgekehrt (T, τ) von allen von (S, σ) getroffen.

b) Dasselbe tritt ein, wenn U ausserhalb σ liegt, sodass auch bei (S, σ) sich zwei Ebenen σ_1, σ_2 ergeben und ein (S, σ) enthaltender Theil $\mathfrak{S}$ des Büschels ST vorhanden ist, dieser aber die Ebenen τ_1, τ_2 und den Theil $\mathfrak{T}$ einschliesst; was durch die beiden Spurenbüschel leicht festgestellt werden kann.

In beiden Fällen durchdringt der Mantel (T, τ), ein- und austretend, den (S, σ); und wir haben einen aus zwei Theilen bestehenden Schnitt. Allein brauchbar ist vom Ebenenbüschel ST der Theil $\mathfrak{T}$ zwischen τ_1, τ_2, der den Mantel (T, τ) in sich hat, im Fall b) selbst sich ganz innerhalb $\mathfrak{S}$ befindet. Durchläuft man ihn hin und zurück, so gehen beim Passiren von τ_1, wo c und d sich vereinigt haben, ac und bc in ad und bd über und beim Passiren von τ_2 wieder zurück in ac und bc; die ac und ad bilden daher den einen, die bc und bd den andern Theil

des Schnitts. Würde hingegen (T, τ) von (S, σ) durchdrungen, so bestände der eine Theil aus den ac, bc, der andere aus den ad, bd.

3) Verhalten sich aber, im Falle U, V beide ausserhalb liegen, die Grenzebenen gleichartig, sodass von jedem Paare nur eine den andern Mantel schneidet, die Theile $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ ineinander greifen, etwa τ_2 in $\mathfrak{S}$, σ_1 in $\mathfrak{T}$ liegt und die Reihenfolge $\tau_1 \sigma_1 \tau_2 \sigma_2$ besteht, so *hat jeder von den beiden Mänteln Kanten, welche den andern nicht treffen: jeder reisst aus dem andern ein Stück heraus* (Ausreissung, arrachement). *Die Schnittfigur besteht nur aus einem Theile;* denn, indem wir den allein brauchbaren Flächenwinkel $\sigma_1 \tau_2$ viermal durchlaufen, geht ein Punkt ac beim ersten Durchgange durch σ_1 in bc, bei dem durch τ_2 in bd, beim zweiten Durchgange durch σ_1 in ad beim zweiten durch τ_2 in ac über: jede Ebene des genannten brauchbaren Theils (ausser σ_1, τ_2) ist viermal passirt worden, und es sind daher alle vier Punkte ac, bc, ad, bd an die Reihe gekommen, der Inbegriff aller dieser Quadrupel ist continuirlich durchlaufen worden.

125. Nachdem k, U, V construirt sind, kann man in jeder der beiden Projectionsebenen für sich arbeiten und hat das Uebereinanderliegen der zusammengehörigen Projectionen derselben Ecke des Schnitts als Controlle. Als Fundamentalregel für die Feststellung der Aufeinanderfolge der Ecken des Schnitts gilt, dass *zwei benachbarte beide sowohl einer und derselben Fläche des einen Polyeders, als auch beide in einer und derselben Fläche des andern liegen*, indem ja das Stück der Schnittlinie beider Flächen, welches innerhalb der Begrenzung der einen und der andern Fläche liegt, die jene Ecken verbindende Seite der Schnittfigur ist.*)

Zu dem Zwecke ist es gut, ein genaues Verzeichniss darüber gleich bei der Construction aufzustellen, von welcher Kante des einen und Fläche des andern Polyeders jede Ecke der Schnittfigur herrührt.

In Fig. 59 (Taf. IV) liegen die beiden Dreiecke ABC und DEF in derselben Ebene E; die Punkte P, Q, R sind Schnitte von Seiten des einen mit Seiten des andern. Die beiden Spurenbüschel haben sich also vereinigt (Scheitel $U = (ST_\infty, \mathrm{E})$). Es ist der Fall der Ausreissung bei einem Prisma und einer Pyramide. Bezeichnet man, der Kürze halber, die Seiten-Kanten und -Flächen blos durch die Ecken und Seiten der Grundfigur, so ist Punkt $1 = (A, ED)$, $4 = (A, EF)$, $5 = (C, EF)$, $8 = (C, ED)$, $2 = (AB, D)$, $7 = (BC, D)$, $3 = (AB, F)$ und $6 = (BC, F)$; daher $12 = (AB, ED)$, $23 = (AB, DF)$, $34 = (AB, EF)$, $45 =$

*) Die vorangehenden Betrachtungen sind aber auch dafür zu benützen.

(AC, EF), $56 = (BC, EF)$, $67 = (BC, DF)$, $78 = (BC, DE)$, $81 = (AC, DE)$.

In Fig. 60 (Taf. V) ist der Fall der Durchdringung eines vierseitigen Prismas durch ein dreiseitiges dargestellt; die Grundfiguren $ABCD$ und EFG liegen in verschiedenen Ebenen: k ist die Schnittlinie, construirt durch Schnittpunkte von Geraden der einen Ebene mit der andern. Die Scheitel U, V der Spurenbüschel sind unendlich fern; es sind z. B. u, v die Spuren der durch AA' gehenden Hilfsebene. Wir haben: $1 = (A, FG)$, $3 = (A, EG)$, $2 = (AD, G)$, $6 = (BC, G)$, $4 = (AB, E)$, $7 = (BC, E)$, $5 = (AB, F)$, $8 = (BC, F)$; also: $12 = (AD, FG)$, $23 = (AD, EG)$, $34 = (AB, EG)$, $45 = (AB, EF)$, $51 = (AB, FG)$; $67 = (BC, EG)$, $78 = (BC, EF)$, $86 = (BC, FG)$.

126. *Die Seite der Schnittfigur*, dasjenige Stück der Schnittlinie der Ebenen zweier Seitenflächen des einen und des andern Mantels, welches zu beiden Mänteln gehört, *kann verschiedenartig ausfallen.* Wenn SA, SB zwei eine Seitenfläche der einen Pyramide begrenzende Kanten, TC, TD zwei eben solche von der andern, A, B, C, D die Schnittpunkte mit der Schnittlinie der beiden Ebenen sind, so sind drei Lagen möglich: 1) die beiden Punktepaare AB, CD schliessen sich aus: wir wollen die Bezeichnung so wählen, dass die Reihenfolge $ABCD$ ist, 2) eins schliesst das andere ein; die Reihenfolge sei $ACDB$, 3) die Paare greifen ineinander über; Reihenfolge: $CADB$. Sodann hat man auch zu unterscheiden, ob AB oder $A \cdot B$ auf dem Mantel von (S, σ) liegt, und ebenso, ob CD oder $C \cdot D$ auf dem von (T, τ); wegen der Bezeichnung $A \cdot B$, $C \cdot D$ sehe man Nr. 115. Die folgende Tabelle giebt Auskunft, welches Stück der Schnittlinie in den zwölf Fällen als Seite der Schnittfigur angehört:

		Reihenfolge		
(S, σ)	(T, τ)	$ABCD$	$ACDB$	$CADB$
AB	CD	nichts	CD	AD
AB	$C \cdot D$	AB	AC, DB	DB
$A \cdot B$	CD	CD	nichts	AC
$A \cdot B$	$C \cdot D$	$A \cdot D$, BC	$A \cdot B$	$C \cdot B$.

In den Fällen, wo eine Seite der Schnittfigur durch das Unendliche geht, enthalten die beiden Seitenflächen, von denen sie herrührt, parallele Erzeugenden. — Um zu Mänteln zu gelangen, welche sich wirklich durchschneiden, wird man besser nicht Leitfiguren und Spitzen von vornherein geben, sondern wenn etwa jene gegeben sind, in der einen Projection geeignete Punkte, etwa U_1, V_1, aufsuchen, in deren

Büscheln es entsprechende (d. h. auf k_1 sich treffende) Strahlen giebt, welche σ_1 und τ_1 schneiden; dabei kann man auch noch eine bestimmte Art der Durchschneidung erzielen. Nun werden U_2, V_2 so ermittelt, dass U in E, V in Φ liegt, und auf der Gerade UV die Spitzen S, T angenommen. In Fig. 60 (Taf. V), wo U, V, S, T unendlich fern sind, sind u, v zwei entsprechende Strahlen der Spurenbüschel; sie schneiden sich auf k und u geht durch A, v durch den Punkt H von FG, l ist eine in die Ebene uv gelegte Gerade, und nach dem Punkte 1 derselben ist die Kante, aus A, des einen Prismas und die Erzeugende, aus H, des andern gezogen, so dass damit die Kantenrichtungen der beiden Prismen parallel zu der Ebene uv festgelegt sind. Die mit τ_1, τ_2 bezeichneten Geraden sind die (ersten Projectionen der) Spuren der Grenzebenen.

Oder wenn die Ebenen E, Φ und die Spitzen S, T gegeben sind, welche zu k, U, V führen, so wird man in der einen Projectionsebene Π_1 die Projectionen σ_1, τ_1 der Leitfiguren so zeichnen, dass sie von entsprechenden Strahlen der Büschel U_1, V_1 getroffen werden, und daraus σ, τ in E, Φ construiren. Will man σ, τ aus den Umlegungen construiren, so muss man auf den beiden Umlegungen von k entsprechende Punkte feststellen, d. h. solche, in welche der nämliche Punkt von k umgelegt wird; denn nach solchen gehen entsprechende Strahlen der Büschel U_0, V_0.

127. Findet eine *Begrenzung* einer Pyramide durch die Spitze statt, so ist die Modification einfach, wenn diese Spitze innerhalb der andern Pyramide liegt; es ist ersichtlich, dass dann nur der Fall der Durchdringung eintreten kann und also von den beiden Theilen der Schnittfigur der eine wegfällt: man wird natürlich schon bei der Construction solche Punkte, die jenseits der Spitze fallen, weglassen.

Etwas umständlicher ist es, wenn eine der Pyramiden, z. B. (S, σ), durch eine Grundfigur σ (bez. beim Prisma auch noch durch eine Deckfigur) begrenzt ist und die Ebene E derselben der Schnittfigur begegnet. Es ist zunächst selbstverständlich, dass alle Punkte der Schnittfigur, die jenseits dieser begrenzenden Ebene liegen, wegzulassen sind; diese Schnittfigur wird dann offen und durch den Schnitt der Ebene E mit der andern Pyramide (T, τ) wieder geschlossen und zwar in folgender Weise: Sei η der Schnitt der Ebene E mit der Pyramide (T, τ), so durchschneiden sich in dem vorliegendem Falle die beiden Figuren σ und η: der Theil von σ, der innerhalb η liegt, liegt innerhalb der Pyramide (T, τ) und ist als unsichtbar zu behandeln; dagegen der Theil von η, der innerhalb σ liegt, vervollständigt gerade den Schnitt der beiden Pyramiden, während der ausserhalb liegende ganz wegzulassen ist, da ja die Ebene E durch σ begrenzt ist.

Wenn also die Grundfigur der einen Pyramide in die andere eindringt, was man in vielen Fällen bald aus der Zeichnung erkennen wird, so empfiehlt es sich vielleicht, nicht der im Vorangehenden besprochenen Methode, welche unbegrenzte Mäntel voraussetzt, sich zu bedienen, sondern die im Nachfolgenden gezeigte allgemeine Methode der Construction des Durchschnitts zweier Polyeder anzuwenden.

128. In Betreff der *Sichtbarkeit* ist Folgendes zu merken: Zuerst hat man bei jedem der beiden Polyeder die Kanten und Flächen festzustellen, welche sichtbar oder unsichtbar wären, wenn das andere nicht vorhanden wäre, und damit auch die beiden Umrisse. *Eine Seite der Schnittfigur ist unsichtbar, wenn auch nur eine der beiden Flächen, die sich in ihr durchschneiden, unsichtbar ist.* Aus dem Lothen der scheinbaren Schnittpunkte der Umrisse nach der andern Projectionsebene erkennt man, welcher von den beiden Umrissen bei einem solchen scheinbaren Schnittpunkte unter (bez. hinter) dem andern verschwindet und also unsichtbar wird. Jede Figur, die auf dem Mantel eines Polyeders von einer Fläche zur andern herumläuft, wechselt offenbar ihre Sichtbarkeit, wo sie eine Umrisskante trifft, die an der betreffenden Stelle sichtbar ist; sie ist zu beiden Seiten des Begegnungspunktes unsichtbar, wenn die Umrisskante, verdeckt durch das andere Polyeder, dort selbst unsichtbar ist. *Die Durchschnittsfigur geht also von der Sichtbarkeit zur Unsichtbarkeit über (oder umgekehrt), wenn sie über eine Umrisskante des einen oder des andern Polyeders geht an einer Stelle, wo dieselbe sichtbar ist.*

Kanten ferner des einen Polyeders, welche sichtbar sind, wenn das andere nicht vorhanden ist, werden unsichtbar, sobald sie unter (hinter) den Umriss des andern treten, was wieder an scheinbaren Schnittpunkten mit diesem Umrisse durch Lothen nach der andern Projectionsebene zu ermitteln ist.

Stücke von Kanten des einen Polyeders, die in dem andern liegen, werden am besten ganz ausgelassen, besonders wenn sie einen Eintritts- und einen Austrittspunkt haben, sodass leicht das fehlende Stück ergänzt werden kann (Fig. 59 und 60, Taf. IV u. V); in dem andern Falle zieht man sie besser aus, weil sonst möglicherweise wichtige Theile des Polyeders fehlen könnten und dasselbe nicht zu erkennen wäre, jedenfalls aber mit einer andern Art Punktirung als sie bei vorhandenen, aber unsichtbaren Kanten, bez. Kantentheilen angewandt wird.

Die Zeichnung gewinnt an Deutlichkeit, wenn die Polyeder und die Durchschnittsfigur verschiedenfarbig ausgezogen werden. Es ist darauf zu achten, dass eine Kante, wenn sie in eine unsichtbare Fläche des andern Polyders eindringt, vorher beim Passiren des Um-

risses desselben unsichtbar geworden ist, wofern sie nicht ganz unsichtbar ist.

129. Die Construction des Durchschnitts zweier Pyramiden- oder Prismen-Mäntel lässt sich unmittelbar auf *Kegel* und *Cylinder* über Kreisen (oder Kegelschnitten) übertragen. Man wird die Projectionen der Leitkreise am besten aus den Umlegungen herstellen, dann in den Ebenen E, Φ derselben geeignete Punkte U, V construiren und auf ihrer Verbindungslinie die Spitzen S, T. Hier sind alle Erzeugenden Kanten geworden; man muss sich beschränken, mit möglichst vielen beide Mäntel durchschneidenden Hilfsebenen zu arbeiten; um das Continuum der Schnittcurve festzustellen, wird man nur einen der 4 Punkte, welche jede der (brauchbaren) Hilfsebenen liefert, verfolgen, eventuell zu derselben Ebene zurückkehrend, um zu ihren andern Punkten zu gelangen. Auch hier sind die drei oben beschriebenen Fälle möglich; das Streifen ist Berühren geworden. Die Schnittcurve kann zwei- oder viermal durch das Unendliche gehen.

Zu den construirten Punkten derselben kann man noch die *Tangenten* hinzufügen und dadurch die Richtigkeit der Zeichnung erhöhen. Es seien a und c zwei von derselben Hilfsebene ausgeschnittene Kanten der beiden Mäntel, also ac ein Punkt der Schnittcurve, ferner A, C die Punkte, in denen sie die Leitcurven treffen, a', c' die Tangenten in ihnen an diese (aus den Umlegungen construirt), so sind Sa', Tc' die Berührungsebenen der Kegel längs a, c, und ihre Schnittlinie ist die Tangente der Schnittcurve im Punkte ac. Sind etwa a und c parallel, so dass sich ein unendlich ferner Punkt der Schnittcurve ergiebt, so werden im allgemeinen die beiden Berührungsebenen nicht auch parallel sein; ihr endlicher Schnitt ist die zu dem unendlich fernen Punkte gehörige *Asymptote.*

130. Soll *der Durchschnitt irgend zweier Polyeder* construirt werden, so muss zunächst mit einem Versuche angefangen werden.

Man hat also eine Fläche des einen und eine des andern herauszugreifen, von denen man vermuthet, dass ein Stück ihrer Schnittlinie innerhalb der Begrenzungspolygone beider Flächen liegt.

In Fig. 61, Taf. V, in welcher der Durchschnitt eines fünfseitigen Prismas und eines regulären Octaeders*) construirt ist, wurde der Versuch in folgender Weise gemacht: Das Prisma ist zunächst mit der zweiten projicirenden Ebene der Octaederkante FG durchschnitten; die erste Projection des Schnitts, welche leicht herzustellen ist, wird von der begrenzten F_1G_1 getroffen, und zwar auf $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$; diese und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ sind

*) Dieselben sind nach Nr. 106 hergestellt.

von den Seiten der Figur $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_1$ allein gezeichnet, weil unmittelbar ersichtlich ist, dass die andern den Schnitt nicht enthalten können. Dass $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ geschnitten wird, beweist, dass die Kante FG die Prismenfläche $ABB'A'$ schneidet; also sind $ABB'A'$ und FGL (ebenso FGK) zwei Flächen, welche einen brauchbaren Schnitt haben. Ein (zweiter) Punkt S dieses Schnitts ergiebt sich nach Nr. 64, indem die zweiten Projectionen l_2 und m_2 von Geraden gesucht werden, die bez. in diesen Flächen liegen und die erste Projection gemeinsam haben; der Genauigkeit halber wird man noch einen dritten construiren.

Von der so gefundenen Schnittlinie liegt das Stück 12 sowohl innerhalb $AA'B'B$, als innerhalb FGL; dass die beiden Projectionen von 2 senkrecht über einander liegen, dient auch als Controlle. Da 2 auf AA' liegt, so bleibt die Schnittfigur noch in der Fläche FGL, verlässt aber $AA'B'B$ und geht über auf die Nachbarfläche $AA'E'E$, deren Schnittlinie mit FGL nun zu suchen ist, d. i. ausser 2 noch ein oder zwei Punkte derselben; von derselben liegt nun nothwendig ein Stück innerhalb beider Figuren und zwar 23; bei 3 wird die Fläche FGL verlassen und zur Fläche GLH übergegangen, die nun mit $AA'E'E$ zum Schnitt zu bringen ist.

Wir haben: $1 = (ABB'A', FG)$, $2 = (AA', FGL)$, $3 = (AEE'A', FL)$, $4 = (AA', GLH)$, $5 = (ABB'A', GH)$, $6 = (BB', GHK)$, $7 = (B'C', GHK)$, $8 = (A'B'C'D'E', GH)$, $9 = (A'B'C'D'E', LH)$, $10 = (C'D', LHJ)$, $11 = (DD', LHJ)$, $12 = (DEE'D', LH)$, $13 = (DEE'D', GL)$, $14 = (DEE'D', FL)$, $15 = (DD', FLJ)$, $16 = (CC', FLJ)$, $17 = (BCC'B', FJ)$, $18 = (BCC'B', FK)$, $19 = (BB', FKG)$.

Daher ist: $12 = (ABB'A', FGL)$, $23 = (AEE'A', FGL)$, $34 = (AEE'A', GLH)$, $45 = (ABB'A', GLH)$, $56 = (ABB'A', GHK)$, $67 = (BCC'B', GHK)$, $78 = (A'B'C'D'E', GHK)$, $89 = (A'B'C'D'E', GHL)$, $9, 10 = (A'B'C'D'E', LHJ)$, $10, 11 = (CDD'C', LHJ)$, $11, 12 = (DEE'D', LHJ)$, $12, 13 = (DEE'D', GLH)$, $13, 14 = (DEE'D', LGF)$, $14, 15 = (DEE'D', FLJ)$, $15, 16 = (CDD'C', FLJ)$, $16, 17 = (BCC'B', FLJ)$, $17, 18 = (BCC'B', FJK)$, $18, 19 = (BCC'B', FKG)$, $19, 1 = (ABB'A', FKG)$.

Als Controlle dient, dass das Schnittpolygon zu dem Punkte 1 zurückkehrt.

131. *Die Durchschnittsfigur kann aus mehreren Theilen bestehen* und jeder Theil erfordert einen Anfangsversuch; und das ist das Unangenehme dieser Construction, wozu dann noch kommt, dass über die Zahl dieser Theile sich gar nichts bestimmen lässt.

Für die Untersuchung, ob *man den Durchschnitt erschöpft hat*, mögen folgende Bemerkungen dienen. Es werden sich jedenfalls leicht stets auf jedem Polyeder Ecken constatiren lassen, die ausserhalb des andern liegen, z. B. dadurch, dass mindestens eine Projection ausserhalb des Umrisses des andern sich befindet; ebenso haben sich auch vielleicht durch die Construction selbst Ecken ergeben, die innerhalb des andern liegen.

Jede Kante des einen Polyeders, deren beide Ecken ausserhalb des andern liegen, trifft dasselbe gar nicht oder zweimal (wofern wir convexe Polyeder voraussetzen); hingegen einmal, wenn die eine Ecke ausserhalb, die andere innerhalb liegt. Jeder Kantenzug des einen Polyeders (Reihe von zusammenhängenden Kanten), von dem beide Endpunkte innerhalb oder beide ausserhalb des andern liegen, muss letzteres in einer geraden Anzahl von Punkten oder in keinem treffen, z. B. also auch ein geschlossener Kantenzug, wovon der einfachste Fall der Perimeter einer Seitenfläche ist. Liegt aber der eine Endpunkt eines Kantenzugs innerhalb, der andere ausserhalb, so ist die Zahl der Begegnungspunkte ungerade.

Befindet sich ein Eckpunkt eines Kantenzugs auf einer Fläche des andern Polyeders und zwar so, dass die beiden in ihm zusammenstossenden Kanten auf derselben Seite der Fläche liegen, die Fläche mithin von dem Kantenzug nicht durchschnitten, sondern nur gestreift wird, so zählt diese Begegnung zweifach; es findet unmittelbar hinter einander Ein- und Austreten (oder umgekehrt) statt; ähnliches gilt, wenn eine Kante des einen Polyeders eine des andern trifft, aber letzteres streift (nicht in dasselbe eindringt). Auch bei der Construction der Durchschnittsfigur selbst bereitet das Liegen einer Ecke des einen Polyeders in einer Fläche des andern Schwierigkeit, weil zweifelhaft ist, auf welche Fläche überzugehen ist; es wird also ein neuer Versuch nothwendig. Hingegen, wenn zwei Kanten sich schneiden, geht man gleichzeitig auf beiden Polyedern zu neuen Flächen über.

Was in Nr. 128 hinsichtlich der Sichtbarkeit gesagt wurde, gilt allgemein.

d) Abwickelung der Polyeder.

132. Die Abwickelung eines *Pyramidenmantels* geschieht dadurch, dass die Seitenflächen in wahrer Gestalt hergestellt und an einander gelegt werden.

Einen *Prismenmantel* dagegen wickelt man am besten mit Hilfe eines Normalschnitts ab, den man entweder auf die gewöhnliche Weise oder nach Anleitung von Nr. 104d) ermittelt. Dieser Normalschnitt

verwandelt sich bei der Abwickelung in eine Gerade; die Kanten werden auf derselben in den Punkten, wo die Seiten zusammenstossen, normal errichtet und auf jeder die wahren Entfernungen der Ecke des Normalschnitts von den Ecken der Grund- und Deckfigur aufgetragen, welche bei Anwendung von Nr. 104d) unmittelbar aus der dritten Projectionsebene zu entnehmen sind.

Die Abwickelung des *Würfels* geschieht, indem alle vier Seitenkanten und drei Kanten der Deckfigur aufgeschnitten werden, die des *Tetraeders* durch Aufschneidung der 3 Seitenkanten. Beim *Octaeder* schneidet man von einem der drei Quadrate drei Seiten auf und von einem zweiten zwei anstossende Seiten, z. B. bei dem Octaeder von Fig. 61 die Kanten HJ, JF, FG; KG, GL; beim *Dodecaeder* 9 von

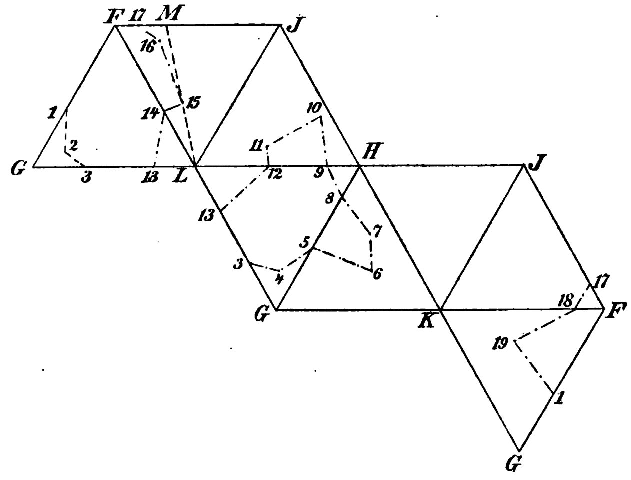


Fig. 62.

den 10 Kanten zwischen φ und φ' und die $2 \cdot 5$ Kanten zwischen ϵ und φ und ϵ' und φ' (Nr. 108); beim *Icosaeder* endlich die 5 Kanten, die nach einer Ecke führen, die fünf nach der Gegenecke und noch eine Kante, welche vom zweiten Eckpunkte einer von jenen Kanten nach demjenigen einer von diesen führt.*)

Durch Drehungen um die nicht aufgeschnittenen Kanten bringt man dann alle Flächen in eine Ebene. In der Abwickelung kommen

*) Besitzt das Polyeder E Ecken, F Flächen, K Kanten, so dass, nach Euler's Satz, $E + F = K + 2$, so hat man, damit die Flächen im Zusammenhang bleiben, $F - 1$ Kanten unaufgeschnitten zu lassen und daher $E - 1$ aufzuschneiden. Beim ersten Aufschneiden einer von diesen werden zwei Ecken berührt, jeder weitere Schnitt führt von einer schon aufgeschnittenen Ecke zu einer neuen, und man gelangt zu allen (Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 49).



natürlich die aufgeschnittenen Kanten zweifach, die Ecken, durch welche h aufgeschnittene Kanten gehen, h-fach vor.

Es soll nun eine Figur, die durch verschiedene Flächen des Polyeders verläuft, in die Abwickelung eingetragen werden. In Fig. 62 ist das Octaeder von Fig. 61 (Taf. V) und seine Durchschnittsfigur mit dem Prisma abgewickelt. Sie hat im allgemeinen sowohl Ecken auf den Kanten des abgewickelten Polyeders, als auch im Innern der Flächen.

Erstere sind sehr leicht auf die Kanten der Abwickelung überzutragen und zwar zweimal, wenn die Kante in der Abwickelung zweimal vorkommt, was eine Zerreissung der Abwickelungs-Figur bewirkt; indem man das Theilverhältniss aus den Projectionen kennt. Im andern Falle, wo der einzutragende Punkt im Innern einer Fläche liegt, z. B. Punkt 15 innerhalb LJF in Fig. 61, sei M der Schnitt von $\overline{15,L}$ mit FJ; die Verhältnisse $\frac{FM}{JM}$ und $\frac{\overline{L,15}}{M,15}$ kennt man aus den Projectionen — es genügt, M in einer zu zeichnen —, und kann nun M und 15 in die Abwickelung übertragen. Diese ist, der Raumersparniss halber, verkleinert gezeichnet.

Siebenter Abschnitt.

Centralprojection oder Perspective.

133. Liegt von einem räumlichen Gebilde $\mathfrak{G}$ eine Zeichnung in Grundriss und Aufriss vor und ist das Centrum O der Perspective oder das *Auge*, wie es gewöhnlich genannt wird, auch durch Grund- und Aufriss gegeben, die Ebene Π der centralen Projection oder die *Tafel* durch ihre Spuren, so hat man die von O nach den Punkten von $\mathfrak{G}$ gehenden Projectionsstrahlen mit Π zu schneiden (Nr. 63) und von der in Π so entstehenden Figur, deren beide Projectionen man besitzt, durch Umlegung die wahre Gestalt herzustellen.

Π wird gewöhnlich vertical angenommen, also senkrecht zur horizontalen Π_1 und mit verticaler zweiter Spur; obwohl die Umlegung in Π_1 etwas einfacher ist, empfiehlt es sich doch, in Π_2 umzulegen (Nr. 57), weil dann verticale Geraden verticale Bilder erhalten. Die Umlegungsconstruction wird erspart, wenn man Π parallel mit Π_2 stellt oder in sie hineinfallen lässt.

Man construire auf diese Weise die Perspective der in Fig. 51 und 52 dargestellten Polyeder und suche dazu Lagen von Π und O, bei denen nicht zu viel Zeichenraum erfordert wird.

134. Im Folgenden soll aber „*freie Perspective*“ behandelt werden*), bei welcher keine Darstellung in Grundriss und Aufriss vorausgesetzt wird.

An der *verticalen Stellung der Tafel* halten wir fest. Die Entfernung d des Auges von ihr heisst die *Augdistanz* und ihr Fusspunkt A der *Augpunkt* oder Hauptpunkt. Jene muss ungefähr die Länge der deutlichen Sehweite haben (25—30 cm); dies führt jedoch zu manchen Unbequemlichkeiten der Construction, weshalb zunächst mit kürzerer Augdistanz gearbeitet werden mag.

Es ist üblich, die in der Tafel durch A gezogene horizontale und verticale Gerade die *Horizontale* und die Verticale schlechthin zu nennen. Man legt am besten A ungefähr in die Mitte des verfügbaren Zeichenraums.

Den darzustellenden Gegenstand denkt man sich meistens hinter der Tafel liegend, d. h. auf der andern Seite, als wo O liegt; das Bild hat dann kleinere Dimensionen.

Wir haben schon in Nr. 3 die Verschwindungsebene Π^* eingeführt, die Parallelebene zu Π durch O. Objecte in dem Raumtheile, der zwischen Π und Π^* liegt, werden durch die Perspective vergrössert; in dem Raume vor Π^*, also hinter dem die Tafel betrachtenden Auge kann vom Sehen nicht die Rede sein; theoretisch darf man jedoch diesen Theil des Raumes nicht ganz unberücksichtigt lassen.

135. Eine zur Tafel parallele Gerade g hat ein zu ihr paralleles Bild g'; die Bilder von Strecken auf ihr verhalten sich wie diese (Nr. 4). Das Veränderungs-Verhältniss oder, entsprechend dem praktisch wichtigsten Falle, wo die Gerade *hinter* Π liegt, das „*Verjüngungs-Verhältniss*“ ist, wie man leicht findet, $\frac{d}{y+d}$, wo y die Entfernung der g von der Tafel und positiv hinter ihr ist.

Alle Geraden der nämlichen Frontebene (Parallelebene zu Π) *haben dasselbe Verjüngungs-Verhältniss.*

Tafelparallel sind insbesondere die verticalen Geraden; ihre Bilder sind also auch vertical.

Eine nicht zur Tafel parallele Gerade g hat eine (endliche) Spur S, in welcher sie sich mit ihrem Bilde g' begegnet. Auf g' zeichnet sich der (endliche) Fluchtpunkt F' aus, das Bild des unendlich fernen Punktes von g, der Schnitt von Π mit der Parallele durch O zu g (Nr. 5). *Die Bilder aller Geraden der nämlichen Richtung haben denselben Fluchtpunkt.*

Man erkennt sofort:

---

*) J. H. Lambert, Freie Perspective, Zürich 1759.

Für die zur Tafel normalen Geraden ist der Augpunkt A der Fluchtpunkt. Alle horizontalen Geraden haben ihre Fluchtpunkte auf der Horizontale. Auf der Verticale liegen die Fluchtpunkte derjenigen Geraden, die zu der Ebene parallel sind, welche in ihr senkrecht auf Π steht.

Jedem Neigungswinkel α gegen die Tafel entspricht ein „Neigungskreis" um A mit dem Halbmesser $d \cot \alpha$, auf dem die Fluchtpunkte aller Geraden liegen, welche jene Tafelneigung haben; denn die Parallelen zu ihnen durch O erzeugen den Rotationskegel aus O über diesem Kreise (Nr. 88). Der der Neigung 45^0 entsprechende hat den Radius d und heisst deshalb *Distanzkreis,* seine Schnitte mit der Horizontale die *Distanzpunkte;* sie liefern uns die Distanz auf der Ebene Π verzeichnet.

136. Wie F' dem unendlich fernen Punkte F_∞ von g entspricht, so entspricht der Verschwindungspunkt $V = g\Pi^*$ dem unendlich fernen Punkte V'_∞ von g' (Nr. 5). Den drei Theilen $F_\infty S$, SV, VF_∞ von g entsprechen die Theile $F'S$, SV'_∞, $V'_\infty F'$ von g', insbesondere also *entspricht dem ganzen Theil von g hinter der Tafel der endliche Theil SF'.*

Wir denken uns g von vorn nach hinten durchlaufen, also im Sinne VSF_∞; sie steigt dann oder fällt, je nachdem der Fluchtpunkt über oder unter der Horizontale liegt; ihr Bild hingegen steigt oder fällt, oder, wie man auch sagt, die Gerade steigt oder fällt *scheinbar,* je nachdem F' höher oder niedriger ist als S. Liegen sie in gleicher Höhe, so ist g scheinbar horizontal. Wenn also z. B. F' über der Horizontale liegt und S noch höher, so handelt es sich um eine Gerade, welche wirklich steigt, scheinbar fällt; liegt F' auf der Horizontale, S niedriger, so liegt eine wirklich horizontale Gerade vor, die scheinbar steigt. Der Leser nehme noch andere Fälle durch.

Durch S und F' ist die Gerade g vollständig und eindeutig bestimmt; denn sie ist die Parallele durch S zu OF'; wir können sie daher mit (S, F') bezeichnen.

Einen Punkt P kann man nur vermittelst einer ihn enthaltenden Gerade fixiren. Wenn P' auf $g' = SF'$ liegt, so ist damit noch nicht gesagt, dass auch P auf g liegt (Nr. 4). Aber jedenfalls liegt OP', auf welcher sich P befindet, in der Ebene $Og'g$ und trifft g; wird also festgesetzt, dass P auf g liegen soll, so ist er als Schnitt von OP' mit g eindeutig bestimmt.

Bei einer tafelparallelen Gerade vereinigen sich S und F' im unendlich fernen Punkte und sind nicht zur Festlegung geeignet; dieselbe geschieht, ausser durch das Bild, *durch einen auf der Gerade befindlichen*

Punkt, der in der obigen Weise durch eine nicht tafelparallele ihn enthaltende Gerade bestimmt ist.

Der Punkt P liege auf $g = (S, F')$ und habe die Entfernung y von der Tafel (mit derselben Vorzeichen-Bestimmung wie oben), dann ist:

$$\frac{SP'}{P'F'} = \frac{P'P}{OP'} = \frac{y}{d};$$

also:

$$\frac{P'F'}{SF'} = \frac{d}{y+d}.$$

Wir schneiden den hinteren Theil von g mit den in den Entfernungen $d, 2d, 3d, \ldots$ gelegten Frontebenen in $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, so ergiebt sich: $Q'_{n-1}F' = \frac{1}{n} \cdot SF'$, $Q'_nF' = \frac{1}{n+1} \cdot SF'$; mithin:

$$Q'_{n-1}\,Q'_n = \frac{1}{n(n+1)} \cdot SF';$$

man sieht, wie die gleichen Strecken $SQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, \ldots$ auf g rasch immer kleiner werdende Bilder haben.

137. *Eine nicht zur Tafel parallele Ebene* E *hat eine (endliche) Spur* s. *Die Parallelen durch* O *zu ihren Geraden* (oder zu den zu ihr parallelen Geraden) *fallen in die Parallelebene* E^* *zu* E *durch* O. *Deren Schnitt* f' *mit* Π, *der zu* s *parallel ist, enthält daher die Fluchtpunkte aller jener Geraden* und heisst die *Fluchtgerade* der Ebene.

Spur und Fluchtgerade einer Ebene sind stets parallel; und zwei Geraden $g = (S, F')$ *und* $g_1 = (S_1, F_1')$ *befinden sich dann und nur dann in derselben Ebene, wenn* $SS_1 \parallel F'F_1'$ *ist.*

Die Fluchtgerade f' *ist das Bild der unendlich fernen Gerade* f_∞ *von* E; während die Verschwindungsgerade $v = \mathsf{E}\Pi^*$ sich in die unendlich ferne Gerade v'_∞ von Π projicirt. Wir kennen aus Nr. 114 die Figur des von $\mathsf{E}, \mathsf{E}^*, \Pi, \Pi^*$ eingeschlossenen parallelopipedischen Raums; Π, Π^*, v, f' entsprechen den dortigen Φ, Φ^*, j, i'.

Den Theilen $f_\infty s$, sv, vf_∞ von E entsprechen im Bilde $f's$, sv'_∞, $v'_\infty f'$, also wiederum dem ganzen Theile der Ebene hinter der Tafel der Streifen sf' von endlicher Breite. Theilt man jenen durch die obigen Frontebenen in die Streifen $sq_1, q_1q_2, \ldots$ von gleicher Breite, so ergiebt sich für die Breiten der Bildstreifen Analoges wie oben.

Fluchtpunkt für die Spurnormalen in E *ist der Fusspunkt* A_1 *des Lothes aus* O *auf* f', *der zugleich derjenige des Lothes aus* A *ist;* diejenigen Geraden in E, welche unter 45° die Spur schneiden, „fliehen im Bilde" nach dem einen oder andern der beiden Punkte auf f', welche von A_1 die Entfernung OA_1 haben.

Parallele Ebenen haben dieselbe Fluchtgerade; die einer tafelnormalen Ebene geht stets durch A. Für die horizontalen Ebenen ist die Horizontale die Fluchtgerade; je nachdem die ebenfalls horizontale Spur über oder unter der Horizontale liegt, fällt oder steigt die Ebene (nach hinten verfolgt) scheinbar.

Die Ebenen durch O von der Tafelneigung α umhüllen denselben Rotationskegel, der die Geraden durch O von dieser Neigung zu Kanten hat (Nr. 88). *Also sind die Fluchtgeraden aller unter dem Winkel α gegen die Tafel geneigten Ebenen Tangenten des Neigungskreises, der durch die Fluchtpunkte der unter diesem Winkel geneigten Geraden gebildet wird;* die Berührungspunkte sind ja auch die Fluchtpunkte A_1 der spurnormalen Geraden der Ebenen, welche dieselbe Neigung haben wie diese (Nr. 15).

Zwei parallele Geraden s, f' in Π, jene als Spur, diese als Fluchtgerade, bestimmen eine Ebene vollständig und eindeutig; sie ist die Parallelebene durch s zu Of'. *Eine Frontebene aber muss durch einen in ihr gelegenen Punkt bestimmt werden.*

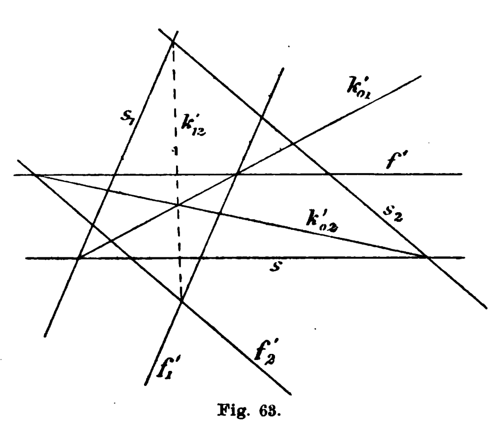


Fig. 63.

138. *Man construire die Schnittlinie zweier Ebenen (s, f'), (s_1, f_1'), den Schnittpunkt dreier Ebenen* (Fig. 63), letzteren als Schnittpunkt zweier von den drei Schnittlinien; die dritte liefert eine Controlle. Es handelt sich um zwei perspective Dreiecke mit parallelen Seiten (Nr. 119). Um *den Schnittpunkt einer Ebene (s, f') mit einer Gerade (S, F')* zu ermitteln, schneide man jene mit einer durch diese gehenden Ebene und die Schnittlinie mit (S, F').

Man lege in (s, f') Geraden oder durch (S, F') Ebenen von gegebener Tafelneigung.

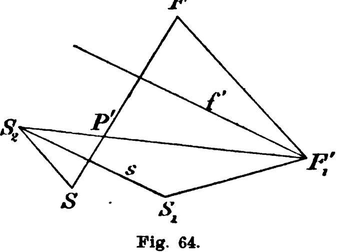


Fig. 64.

Man verbinde einen Punkt P, der auf (S, F') gegeben ist, mit der Gerade (S_1, F_1') durch eine Ebene (Fig. 64). Wir ziehen $P'F_1'$ und schneiden sie in S_2 mit der Parallele durch S zu $F'F_1'$, so ist (S_2, F_1') die Parallele durch P zu (S_1, F_1'); denn sie schneidet (S, F') und dann in P, weil

die Verbindungslinien der Spuren und der Fluchtpunkte parallel sind. Sie liegt in der verlangten Ebene; deren Spur s ist also $S_1 S_2$, und die Parallele zu ihr durch F_1' ist die Fluchtgerade f'.

Ist (S_1, F_1') die Gerade, die zur Fixirung eines zweiten Punktes P_1 dient, so erhält man in den Schnitten von $P'P_1'$ mit s und f' *Spur und Fluchtpunkt der Verbindungslinie* PP_1.

Die Entfernung zweier parallelen Ebenen ist gleich derjenigen ihrer Spuren, dividirt durch den Cosinus der Tafelneigung, welche aus der gemeinsamen Fluchtgerade sich ergiebt. Da es nun leicht ist, durch zwei windschiefe Geraden die Parallelebenen zu legen, so hat man auch die Länge ihrer kürzesten Entfernung.

Erst, wenn Masseigenschaften in Frage kommen, werden A und d nothwendig.

139. Wenn F' und f' zu Strahlen und Ebenen gehören, die zu einander normal sind, so ist $OF' \perp Of'$ und daher die Ebene $OF'A$ zur Schnittlinie f' von Of' und Π normal, weil zu beiden Ebenen; also ist auch $F'A$ normal zu f'; ist A_1 der Fusspunkt, so ist $\triangle F'OA_1$ bei O rechtwinklig, OA seine Hypotenusenhöhe; daher:

$$F'A \cdot AA_1 = d^2,$$

und zwar auch dem Vorzeichen nach. Legt man dies Dreieck um $F'AA_1$ in Π um, so ergiebt sich folgende Construction von F' aus f': man ziehe AA_1 senkrecht zu f', senkrecht darauf $AO_0 = d$, dann O_0F' senkrecht zu A_1O_0, wo F' der Schnitt mit AA_1 ist. Und ähnlich ergiebt sich f' aus F'. Auf diese Weise erhält man *den Fluchtpunkt der Geraden, die zu einer gegebenen Stellung (Fluchtgerade f') normal sind, und die Fluchtgerade der Ebenen, die zu einer gegebenen Richtung (Fluchtpunkt F') normal sind.* Nähert sich eins dieser zusammengehörigen Fluchtelemente dem Augpunkte, so entfernt sich das andere.

140. *Es soll der Winkel zweier Geraden* (S, F'), (S_1, F_1') *ermittelt werden;* ersichtlich genügen die Fluchtpunkte: man ermittelt den Winkel der Parallelstrahlen OF', OF_1' und legt deren Ebene um ihre Spur $f' = F'F_1'$ um: eine uns bekannte Construction. Wir wollen die Umlegung O_0 von O, dessen Orthogonalprojection A ist, haben, fällen daher AA_1 senkrecht auf f', errichten darauf in A das Loth $\overline{AO_0} = d$ und tragen die Hypotenuse $A_1\overline{O_0}$ auf A_1A von A_1 aus ab bis O_0; es ist dann $F'O_0F_1'$ der verlangte Winkel. Kommen bei Winkelbestimmungen Ebenen vor, so ersetzt man sie durch die Lothe auf ihnen (Nr. 18), ihre Fluchtelemente also durch die zugehörigen normalen. In der Fig. 65 ist in β der Winkel zwischen den Strahlen und Ebenen ermittelt, denen die Fluchtelemente F' und f' zugehören.

141. *Auf $g' = SF'$ ist das Bild $P'Q'$ einer Strecke gegeben; man soll die wahre Länge bestimmen* (Fig. 66). Legt man die Ebene $g'O$ und mit ihr O nach O_0 um in der eben beschriebenen Weise, so ist die Parallele durch S zu O_0F' die Umlegung g_0 von g, die ja auch in dieser Ebene, der projicirenden Ebene, liegt. Die Strahlen $O_0(P', Q')$ schneiden in g_0 die wahre Länge P_0Q_0 ein.

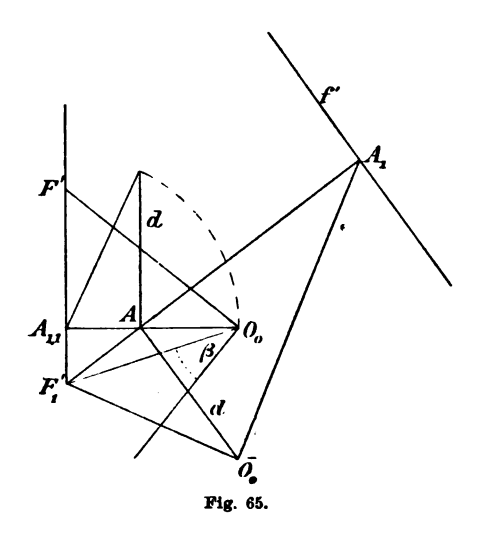


Fig. 65.

Und umgekehrt führt dies zur Auflösung der Aufgabe: *Wenn das Bild P' eines Punktes P auf einer Gerade (S, F') bekannt ist, das Bild Q' des andern Endpunktes einer Strecke PQ von gegebener Länge zu construiren.*

Ist R ein dritter Punkt auf g und R' sein Bild, so führt O_0R' zu R_0 und $\frac{P_0R_0}{Q_0R_0} = \frac{PR}{QR}$; dies lehrt, *wie man eine Strecke, deren Bild vorliegt, nach gegebenem Verhältnisse zu theilen hat.*

Man hat freilich hierbei meistens mit nicht günstig gelegenen Punkten zu thun.

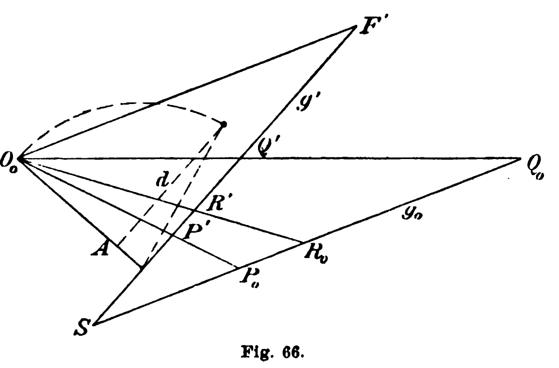


Fig. 66.

Wird eine Ebene E *um ihre Spur in* Π *umgelegt, so besteht zwischen der Umlegung und dem Bilde Homologie,* mit welcher wir jedoch aus den Betrachtungen von Nr. 118 schon vollständig vertraut sind; es genügt, zu erwähnen, dass die Axe der Homologie, auf der sich entsprechende Geraden begegnen, die Spur s ist, das Centrum, durch das alle Verbindungslinien entsprechender Punkte laufen, die Umlegung O_0 des Auges O mit der Parallelebene Of'. Die Fluchtgerade f' ist die zum Bildfelde gehörige Fluchtgerade, jetzt insbesondere durch diesen Namen ausgezeichnet, während die zur Umlegung gehörige Fluchtgerade die Umlegung v_0 der Verschwindungsgerade v der E ist.

142. Die Aufgabe, eine Strecke auf $g = (S, F')$ vom gegebenen Punkte P aus aufzutragen, und ihre Umkehrung, die wahre Länge einer im perspectiven Bilde gegebenen Strecke zu ermitteln, kann man auch mit Hilfe einer durch die Gerade gelegten Ebene lösen, indem man einen der beiden Parallelstrahlenbüschel in der Ebene, deren Strahlen als Basen mit g und der Spur s (oder den Spurparallelen) gleichschenklige Dreiecke bilden, und seinen Fluchtpunkt benutzt (Fig. 67). Da auch in der Parallelebene Of' ein gleichschenkliges Dreieck entsteht, so hat dieser Fluchtpunkt D' auf f' von F' die Entfernung OF', die ja durch Umlegung leicht bestimmt werden kann, und durchläuft, wenn die Hilfsebene verändert wird, einen Kreis um F'. Zieht man also $D'P'$ bis P_1 auf s, trägt $P_1 Q_1$ gleich der gegebenen Strecke l auf s auf, so ergiebt sich Q' auf g' durch Schnitt mit $D'Q_1$; ebenso, wenn Q' gegeben ist, findet sich Q_1 auf s und die wahre Länge $P_1 Q_1$.

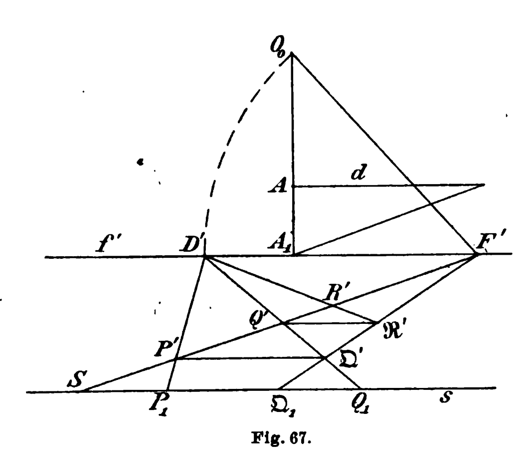


Fig. 67.

Hätte man $F'D' = \frac{1}{m} \cdot F'O$ gemacht, so würde $P_1 Q_1$ der m-te Theil von PQ sein; dazu wird man greifen, wenn das vorhin construirte $F'D'$ oder wenn l zu gross ist*) und im verfügbaren Zeichenraum nicht Platz findet. Bleiben wir aber bei $F'D' = F'O$; so möge durch P' die Parallele zu s und f', das Bild einer spur- und tafelparallelen Gerade in E, gezogen werden. Schneidet $D'Q'$ sie in $\mathfrak{Q}'$, so ist $P'\mathfrak{Q}'$ das Bild einer auf ihr gelegenen mit PQ gleichen Strecke. Projicirt man es aus irgend einem Punkte von f' auf s, so ergiebt sich, weil in Wirklichkeit ein Parallelogramm entsteht, die wahre Länge. Als diesen Fluchtpunkt der nicht spurparallelen Gegenseiten des Parallelogramms nimmt man am besten den Fluchtpunkt F' der Gerade $g = PQ$, so dass, wenn $\mathfrak{Q}_1$ die Projection von $\mathfrak{Q}'$ aus F' auf s ist, $S\mathfrak{Q}_1$ die wahre Länge ist, die möglicherweise günstiger liegt, als das vorhinige $P_1 Q_1$. Man hat also $S\mathfrak{Q}_1 = l$ auf s aufzutragen, $F'\mathfrak{Q}_1$ in $\mathfrak{Q}'$ mit der Parallele durch P' zu s zu schneiden und g' mit $D'\mathfrak{Q}'$ in Q'.

*) Ein zu grosses l theilt man wohl auch in Theile, die hinter einander aufgetragen werden.



Wird dann $\mathfrak{Q}_1 F'$ in $\mathfrak{R}'$ von der Parallele durch Q' zu s geschnitten, so liefert $D'\mathfrak{R}'$ auf g' den Punkt R', so dass QR auch die Länge l hat; und so fortfahrend kann man dieselbe beliebig oft hinter einander auftragen.

143. *Wenn es sich nur darum handelt, eine Strecke PQ auf $g = (S, F')$, deren Bild $P'Q'$ schon vorliegt, zu vervielfachen, so kann man jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{F}'$ der Fluchtgerade f' einer durch g gelegten Ebene* E *benützen an Stelle von D'* (Fig. 68); denn die drei Parallelstrahlenbüschel in E, von denen einer aus spurparallelen Strahlen besteht, während die andern F' und $\mathfrak{F}'$ zu Fluchtpunkten haben, führen zu den congruenten Dreiecken $PQ\mathfrak{Q}$, $QR\mathfrak{R}, \ldots$ mit den gleichen Seiten PQ, $QR, \ldots$.

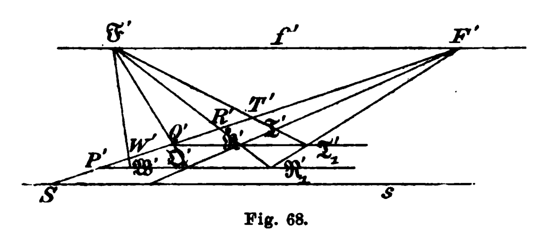


Fig. 68.

Wird $P'\mathfrak{Q}'$ in $\mathfrak{W}'$ nach gegebenem Verhältnisse getheilt, so liefert $\mathfrak{F}'\mathfrak{W}'$ auf g' das Bild W' des Punktes W, welcher PQ nach diesem Verhältnisse theilt.

Schneidet man $R'\mathfrak{R}'$ mit $P'\mathfrak{Q}'$ in $\mathfrak{R}_1'$, so ist $\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}_1' = P'\mathfrak{Q}'$, ebenso geht die nächste derartige Linie $T'\mathfrak{T}'$ durch den Punkt $\mathfrak{T}_1'$ auf $Q'\mathfrak{R}'$, für den $\mathfrak{R}'\mathfrak{T}_1' = Q'\mathfrak{R}'$ ist, und der ersichtlich auf $F'\mathfrak{R}_1'$ liegt, sowie alle weiteren derartigen Punkte.

Die Construction der Vervielfachung von PQ, deren Bild $P'Q'$ auf $g' = SF'$ ist, geschieht daher, ohne Benutzung von $\mathfrak{F}'$, folgendermassen (Fig. 69): Durch P', Q' sind zwei beliebig gerichtete Parallelen gezogen; wir machen auf der ersten $P'\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}'\mathfrak{R}_1'$, ziehen $F'\mathfrak{Q}'$ und $F'\mathfrak{R}_1'$, welche von der zweiten in $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{T}_1'$ geschnitten werden; es schneidet dann $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}_1'$ die g' in R', die durch diesen gehende Parallele von jener Richtung treffe wiederum in $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{U}_1'$; dann liefert $\mathfrak{T}'\mathfrak{T}_1'$ das Bild T' des dritten Endpunktes; u. s. w.

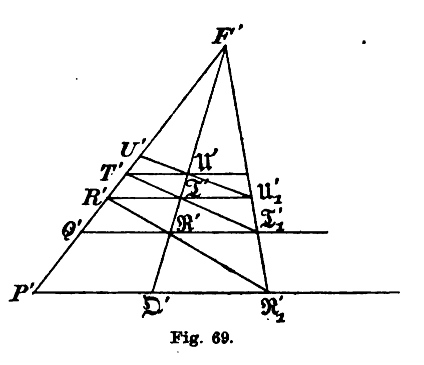


Fig. 69.

Man zeichne zu dieser Bildfigur die Originalfigur, in der auch den nach F' gehenden Strahlen Parallelen entsprechen.

144. Im Vorangehenden ist auf *ungünstig gelegene* Punkte noch wenig Rücksicht genommen. Diese treten aber in der Perspective

ziemlich zahlreich auf. Wenn die Augdistanz in richtiger Länge genommen wird, so fallen viele Fluchtpunkte ausserhalb des Zeichenraums; auch für O_0 und andere Punkte gilt dies.

Oft ist ein unzugänglicher Punkt bekannt als Schnitt zweier in der Zeichnung vorhandenen Geraden g, l; um von einem andern Punkt P nach ihm die Gerade zu ziehen, verfahren wir nach Anweisung von Nr. 119. Oder wir schneiden g und l mit zwei parallelen Geraden, von denen eine durch P geht, in G, L; G_1, L_1, theilen $G_1 L_1$ in P_1 nach demselben Verhältnisse, wie GL durch P getheilt ist, so ist PP_1 die verlangte Gerade.

Liegt auf einer Gerade g ein ausserhalb der Zeichenfläche fallender Punkt Q m-mal weiter von einem Punkte C derselben entfernt, als ein anderer $\frac{Q}{m}$, der noch ins Zeichenblatt zu liegen kommt, so nähere man auch P, von dem nach Q die Gerade gezogen werden soll, dem C bis auf $\frac{1}{m}$ der Entfernung, nach $\frac{P}{m}$; ersichtlich ist PQ parallel zu $\frac{P}{m}\frac{Q}{m}$.

Solche „Reductionen" ergeben sich durch Herannäherung des Auges an die Tafel. *Jede Verlegung des Auges ändert die Fluchtelemente, lässt aber die Spuren.*

Wird das Auge zunächst parallel zur Tafel verschoben von O nach O^*, so verschieben sich A und alle Fluchtpunkte um eine Strecke, die in Grösse, Richtung und Sinn mit OO^* übereinstimmt, die Bilder der endlichen Punkte durchlaufen Strecken von derselben Richtung; liegen sie hinter der Tafel, dann auch von gleichem Sinne, aber kleinerer Länge als OO^* $\left(P'P'^* = OO^* \cdot \frac{y}{y+d}\right)$. Ist OO^* gleich der Entfernung der beiden Augen, so hat man zwei stereoskopische Bilder.

145. *Wird nun aber O der Tafel in der Richtung auf den Punkt C derselben bis auf $\frac{1}{m}$ der Entfernung genähert* (Fig. 70), so dass $\frac{O}{m}C = \frac{1}{m} \cdot OC$, $\frac{A}{m}C = \frac{1}{m}AC$ und die neue Augdistanz $\frac{d}{m}$ *) ist, *so nähern sich auch alle Fluchtpunkte dem C auf $\frac{1}{m}$*; $\frac{F'}{m}C = \frac{1}{m} \cdot F'C$; folglich gilt dies auch für die Fluchtgeraden. Mit den kleineren

*) $\frac{d}{m}$ ist Bruch; $\frac{O}{m}, \frac{A}{m}$ u. s. w. sind bequeme Bezeichnungen.



Neigungskreisen construirt man zunächst die „reducirten“ Fluchtelemente, durch welche dann die Lage der eigentlichen bestimmt ist. *Die Aehnlichkeit und ähnliche Lage in Bezug auf C aber geht noch weiter:* auch A_1 und $\frac{A_1}{m}$, die Fusspunkte der Lothe aus A auf f', aus $\frac{A}{m}$ auf $\frac{f'}{m}$, O_0 und $\frac{O_0}{m}$, die Umlegungen von O mit Of', von $\frac{O}{m}$ mit $\frac{O}{m}\frac{f'}{m}$, sind entsprechend, sowie D' und $\frac{D'}{m}$, die „Auftragspunkte“, die zu Geraden gehören, deren Fluchtpunkte F', $\frac{F'}{m}$ auf f',

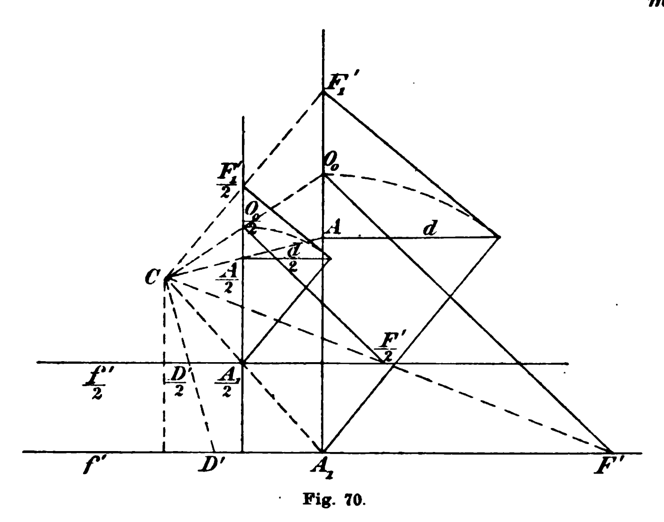


Fig. 70.

bezw. $\frac{f'}{m}$ liegen, und die Fluchtpunkte F_1', $\frac{F_1'}{m}$, die zu den Strahlen gehören, welche auf den Ebenen mit den Fluchtlinien f', $\frac{f'}{m}$ normal sind. Jedesmal, wenn man einen solchen reducirten Punkt erhalten hat, wird man versuchen, ob nicht der wirkliche doch noch innerhalb der Zeichenfläche vorhanden ist; z. B. wenn F' auf f' ungünstig liegt und mit $\frac{F'}{m}$ gearbeitet werden muss, kann der Auftragspunkt D', oder, wenn f' ungünstig liegt, kann F_1' günstig liegen.

Hat man längere Zeit mit derselben Ebene oder mit parallelen, also mit derselben f' zu thun, so wird man C darauf legen, am besten in A_1, weil dann einige Vereinfachungen eintreten. Am meisten empfiehlt sich der Augpunkt A als Punkt C.

146. Eine Reduction anderer Art wird erforderlich, wenn *der darzustellende Gegenstand so grosse Dimensionen hat, dass mit ihnen auf*

dem Zeichenblatte nicht gearbeitet werden kann. Man verjüngt ihn dann, so jedoch, dass das Bild davon nicht beeinflusst wird. Man rückt ihn so auf O zu, dass er sich ähnlich und ähnlich gelegen bleibt in Bezug auf O als Aehnlichkeitspunkt, also jeder Punkt seinen Projectionsstrahl und sein Bild behält. Die Annäherung erfolge bis auf $\frac{1}{n}$ der Entfernung. Die Entfernungen von der Verschwindungsebene erleiden dieselbe Verkleinerung, während für diejenigen y, y^* von der Tafel gilt: $y^* + d = \frac{1}{n}(y + d)$. Nehmen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, von dem die x- und die z-Axe, in A sich schneidend, in der Tafel liegen, so gilt für die y, y^* das eben Gesagte, während $x^* = \frac{1}{n} \cdot x$, $z^* = \frac{1}{n} \cdot z$. *Die Fluchtelemente werden nicht verändert,* da die Geraden und Ebenen des Objects sich parallel verschoben haben.

147. Auf Grund dieser Erörterungen soll nun eine einfachere perspectivische Zeichnung entworfen werden. Es handelt sich um eine fünfstufige Treppe, die von zwei Pfeilern eingeschlossen ist (Fig. 71, Taf. VI). Die Pfeiler seien 90 cm hoch, 45 cm breit, die Treppe habe die Breite 180 cm zwischen den Pfeilern, die Höhe der Stufen sei 18 cm, die Tiefe 30 cm; die innere verticale Kante des linken Pfeilers befinde sich 330 cm hinter der Tafel; folglich ist, indem $d = 30$ cm angenommen wird, ihr Verjüngungs-Verhältniss $\frac{30}{30 + 330} = \frac{1}{12}$, das Bild der Kante hat also die Länge $\frac{1}{12} \cdot 90 \text{ cm} = 7{,}5 \text{ cm}$.

Wir nähern das Object dem Auge bis auf $\frac{1}{6}$ und haben es *von nun an* mit den kleineren Dimensionen zu thun: Pfeilerhöhe 15 cm, Pfeilerbreite 7,5 cm, Treppenbreite 30 cm, Stufenhöhe 3 cm, Stufentiefe 5 cm. Jene Kante liegt jetzt in der Frontebene, welche die Entfernung d von der Tafel und daher das Verkürzungs-Verhältniss $\frac{1}{2}$ hat; das Bild der Kante hat also — unverändert — die Länge 7,5 cm.

Als Punkt C, auf den zu wir, behufs der Gewinnung reducirter Flucht- und Auftragspunkte, das Auge der Tafel nähern, sei der Augpunkt A gewählt, und zwar nehmen wir zunächst Annäherung bis auf ein Drittel; $\frac{O_0}{3}$ sei die Umlegung des Auges mit der durch die Horizontale a gehenden Horizontalebene nach unten.

Die beiden an unserm Objecte auftretenden horizontalen Richtungen seien nahezu rechtwinklig und parallel zur Tafel; der Winkel α

der ersteren mit der Tafel sei $\frac{O_0}{3}\frac{F'}{3}A$; aus dem reducirten Fluchtpunkte $\frac{F'}{3}$ ist der wirkliche F' hergestellt: $AF' = 3 \cdot A\frac{F'}{3}$. Von dem der andern Richtung entsprechenden Fluchtpunkte F_1' fällt nicht einmal $\frac{F_1'}{3}$ innerhalb des Zeichenblatts; wir benutzen $\frac{O_0}{12}$, ziehen die Senkrechte durch diesen Punkt zu $\frac{O_0}{3}\frac{F'}{3}$, welche zu $\frac{O_0}{12}\frac{F'}{12}$ und O_0F' parallel ist, bis zum Schnitte $\frac{F_1'}{12}$ mit a; F_1' hat 12-mal so grosse Entfernung von A.*)

Es ist $F'O_0 = 3 \cdot \frac{F'}{3}\frac{O_0}{3}$ und es muss $F'D' = F'O_0$ sein; beide eigentlichen Auftragspunkte kommen nicht zu Stande; wir ersetzen sie durch diejenigen, bei welchen mit einem Drittel der aufzutragenden Längen gearbeitet wird; diese beiden Auftragspunkte, welche mit $D'\left(\frac{1}{3}\right)$ bezeichnet werden mögen, haben von F' die Entfernung $\frac{1}{3} \cdot F'O_0$, also $\frac{F'}{3}\frac{O_0}{3}$. Wenn ferner $\frac{D_1'}{12}\frac{F_1'}{12} = \frac{O_0}{12}\frac{F_1'}{12}$ auf a gemacht wird, so muss D_1', der zu den Geraden mit dem Fluchtpunkte F_1' gehörige Auftragspunkt, 12-mal weiter von A entfernt sein als $\frac{D_1'}{12}$. Wir erhalten nur einen der beiden $\frac{D_1'}{12}$ und diesen so nahe an A, dass die Vervielfachung mit Hilfe des Zirkels sich nicht empfiehlt; man wird besser mit einem möglichst genauen Massstabe arbeiten.

Zur Controllirung der mit diesem etwas unsicheren Auftragspunkte D_1' gemachten Auftragungen ist noch ein Fluchtpunkt F_2' hergestellt; der rechte Winkel bei $\frac{O_0}{3}$, der von den Umlegungen unserer beiden Richtungen gebildet wird, sei durch $\frac{O_0}{3}\frac{F_2'}{3}$ halbirt und aus $\frac{F_2'}{3}$ sei F_2' construirt, so ist das der Fluchtpunkt solcher Hori-

*) Es ist vortheilhaft, damit man, etwa unter Anwendung perspectiver Dreiecke, Geraden nach F_1' ziehen kann, sich noch eine zweite durch diesen Punkt gehende Gerade zu verschaffen: Man trage z. B. auf eine Gerade durch A möglichst genau $A\frac{\mathfrak{B}}{12} = 1$ cm, dann $A\mathfrak{B} = 12$ cm auf; so ist die Parallele durch $\mathfrak{B}$ zu $\frac{\mathfrak{B}}{12}\frac{F_1'}{12}$ eine solche Gerade.

zontalen, welche mit unsern Richtungen gleiche Winkel bilden; so dass, wenn es sich um Gerade der nämlichen Horizontalebene handelt, die nach F_2' fliehenden auf denen, welche F' und F_1' zu Fluchtpunkten haben, gleiche Strecken einschneiden.

Die Horizontalebene durch O durchschneide unser Object in $\frac{2}{3}$ der Höhe, so dass von den verticalen Pfeilerkanten 10 cm unter- und 5 cm oberhalb sind. Daher ist die Spur s der untersten Horizontalebene des Objects, der „Grundebene", 10 cm unterhalb a und geht also durch $\frac{O_0}{3}$. Aber wir werden meistens mit derjenigen Spurparallele h dieser Ebene arbeiten, die in der oben erwähnten Frontebene liegt und durch den Fusspunkt P derjenigen Pfeilerkante PQ geht, die sich in dieser Frontebene befindet. Das Verjüngungs-Verhältniss auf h ist $\frac{1}{2}$, und das Bild h' liegt in der Mitte zwischen a und s. Die Spur s benützen wir nur für die Festsetzung der Lage P_1 der Orthogonalprojection von P auf die Tafel; der Schnitt von AP_1 mit h' ist dann P'. Nun wird $P'Q' = 7{,}5$ cm vertical gezogen, ferner g' und l' aus P' nach F' und F_1', letzteres dadurch, dass P' dem A auf $\frac{1}{12}$ genähert bis $\frac{P'}{12}$ und durch P' die Parallele zu $\frac{P'}{12}\frac{F_1'}{12}$ gezogen wird, oder besser, nachdem oben eine zweite Gerade durch F_1' construirt ist, vermittelst perspectiver Dreiecke. Auf h' trägt man dann nach links die Pfeilerbreite, nach rechts zuerst die Treppen-, dann die Pfeilerbreite, aber halbirt, also $\frac{1}{2} \cdot 7{,}5$ cm, bezw. $\frac{1}{2} \cdot 30$ cm und $\frac{1}{2} \cdot 7{,}5$ cm auf und projicirt die erhaltenen Endpunkte aus dem Auftragspunkte D_1' auf l' nach R', T', U'.*) Um auf g von P aus fünfmal die Stufentiefe 5 cm zu erhalten, trägt man, den linken $D'\left(\frac{1}{3}\right)$ benutzend, nach rechts von P' aus auf h' fünfmal $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5$ cm auf $\left(\frac{1}{2}\right.$, weil auf h' gearbeitet, $\frac{1}{3}$, weil $D'\left(\frac{1}{3}\right)$ benutzt wird$\left.\right)$ und projicirt die erhaltenen Punkte aus $D'\left(\frac{1}{3}\right)$ auf g'. Theilt man noch $P'Q'$, das Bild einer Tafelparallele, in fünf gleiche Theile, zieht durch jene Punkte auf g' die Verticalen, durch diese die Geraden nach F', so

---

*) $P'T'$ ist wegen der Wichtigkeit dieser Linie für die Construction ausgezogen.

erhält man das Bild des Schnitts der Treppe mit der innern Seitenwand des linken Pfeilers. Wenn auf g von P aus noch 7,5 cm im Bilde aufgetragen wird bis W', so haben PW und PR gleiche Länge; also muss $R'W'$ durch F_2' gehen.

Um auf der Verticale durch T' 15 cm aufzutragen, zieht man aus irgend einem Fluchtpunkte auf a, etwa A, den Strahl nach T' bis zum Schnitte mit h', durch diesen die Verticale von der Länge $\frac{1}{2} \cdot 15$ cm und durch den Endpunkt wieder den Strahl nach A, der auf der ersten Verticale den gesuchten Endpunkt V' einschneidet. $Q'V'$ muss durch F_1' gehen, was mit Hilfe perspectiver Dreiecke controllirt werden kann.

Auf $T'F'$ wird jetzt ebenfalls, wie auf $P'F'$, fünfmal die Stufentiefe aufgetragen, diesmal mit Hilfe des rechten $D'\left(\frac{1}{3}\right)$. Es ergiebt sich das Bild des Schnittes der Treppe mit der innern Wand des rechten Pfeilers. Durch Verbindung entsprechender Punkte der Bilder der beiden Schnitte erhält man die Bilder der horizontalen Kanten der Treppe, die nach F_1' fliehen, unter Vermeidung dieses unbequemen Fluchtpunktes. Die oberen Stufenflächen werden im Bilde, wie nothwendig, immer schmäler, je mehr man sich der Horizontale nähert, und über ihr unsichtbar. Es erübrigt noch die Construction der verticalen Kanten durch R' und U'.

Wird auf $T'F'$ sechsmal die Stufentiefe aufgetragen bis Z', so ergiebt sich eine Strecke, die der Treppenbreite (30 cm) gleich ist; daher muss $Z'P'$ durch F_2' gehen, womit von neuem D_1' controllirt wird.

Achter Abschnitt.

Schräge Parallelprojection.

148. *In die Beziehung zwischen einer Strecke PQ auf g und ihrer Parallelprojection $P'Q'$* gehen ein die spitzen Winkel β und σ, welche g und die Projectionsstrahlen p mit Π bilden, und der Winkel λ, den sie mit einander bilden, und zwar genauer derjenige Winkel, den solche aus einem beliebigen Punkte in der Richtung von g und p gezogene Halbstrahlen einschliessen, welche beide die Π treffen. Wir schneiden (Fig. 72) mit der Parallebene Π^* zu Π durch Q den Pro-

jectionsstrahl von P in P''; dann sind die Geraden $P''Q$ und $P'Q'$ als Schnitte der Ebenen Π^* und Π mit der Ebene QPP'', in welche auch der Projectionsstrahl QQ' fällt, parallel und da auch $PP''P'$ und QQ' parallel sind, so ist $P''Q = P'Q'$. Wenn noch P_1 die Orthogonalprojection von P auf Π^* ist, so ist $\sphericalangle PQP_1 = \beta$, $\sphericalangle PP''P_1 = \sigma$, also $PP'' = PQ \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\sigma}$; ferner $\sphericalangle QPP'' = \lambda$. Der Cosinussatz, angewandt auf $\Delta\, PQP''$, giebt *die Beziehung:*

$$P'Q' = PQ \cdot \sqrt{1 + \frac{\sin\beta}{\sin\sigma}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\sigma} - 2\cos\lambda\right)}.$$

Der Winkel λ *befindet sich immer zwischen* $180^0 - (\beta + \sigma)$ *und der Differenz von* β *und* σ*;* denn als Kantenwinkel der dreiseitigen Ecke $P(Q, P'', P_1)$ muss er kleiner als die Summe und grösser als die Differenz der beiden andern Kantenwinkel sein, welche $90^0 - \beta$ und $90^0 - \sigma$ sind. Fallen die drei Kanten in eine Ebene, welche dann zugleich schräg und orthogonal projicirende Ebene der g ist, so hat λ einen der beiden Grenzwerthe.

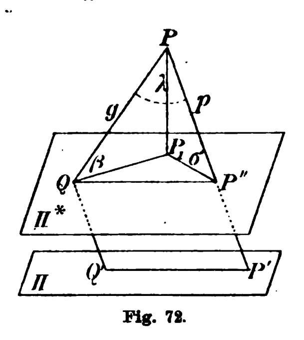


Fig. 72.

λ hat nur einen Werth $90^0 - \beta$, bezw. $90^0 - \sigma$, wenn σ oder β gleich 90^0 ist; denn in diesem Werth fallen die Grenzwerthe zusammen. Daraus ergiebt sich für $\sigma = 90^0$ die bekannte Formel der Orthogonalprojection, für $\beta = 90^0$ aber:

$$P'Q' = PQ \cdot \operatorname{cotg}\sigma,$$

die natürlich auch unmittelbar ersichtlich ist. Sie giebt *die Länge der schrägen Parallelprojection oder,* wie einfacher gesagt werden soll, *der schrägen Projection einer zur Projectionsebene senkrechten Strecke.*

Ist $\lambda \geqq 90^0$, so ist stets $P'Q' > PQ$; insbesondere, wenn $\lambda = 90^0$, ist $P'Q' = PQ \cdot \sqrt{1 + \frac{\sin\beta^2}{\sin\sigma^2}}$.

Liegt also *ein Kreis vom Radius r in einer zu den Projectionsstrahlen senkrechten Ebene vor,* so wachsen die Neigungswinkel β seiner Durchmesser (Nr. 15) von 0^0 bis $90^0 - \sigma$, der Neigung der Ebene gegen Π; die grösste gehört zu demjenigen Durchmesser, der dieselbe Orthogonalprojection auf Π hat, wie der Projectionsstrahl des Mittelpunktes. Projection des Kreises ist daher eine Ellipse, deren Halbaxen, gelegen auf dieser Orthogonalprojection und senkrecht dazu, $\frac{r}{\sin\sigma}$ und r sind und die nach Nr. 25 construirt werden kann.

149. Wenn *Grundriss und Aufriss eines Objects* weniger anschaulich sind, weil etwa verschiedene ebene Figuren sich geradlinig projiciren, so pflegt man noch eine schräge Projection hinzuzufügen, welche in folgender Weise leicht aus der orthogonalen herausgearbeitet werden kann. Wir nehmen die verticale Π_2 auch als Ebene Π der schrägen Projection und haben dann nur die zweiten Abstände $P_2P = P_aP_1$ (Nr. 44) schräg zu projiciren. Sind p_1, p_2 die Orthogonalprojectionen eines schrägen Projectionsstrahls p, so ist p_2 auch schräge Projection jedes der Lothe, die einen Punkt von p auf Π_2 projiciren. *Also ist die Richtung von p_2 die der schrägen Projection der Lothe auf* Π. Die Geraden in Π von dieser wichtigen Richtung mögen die *Schrägen* (fuyantes) genannt werden. Um P' zu erhalten, hat man also auf der Schrägen durch P_2 $P_2P' = P_aP_1 \operatorname{cotg} \sigma$ aufzutragen; in Bezug auf den *Sinn*, in welchem aufzutragen ist, gilt: Die Projection P_2P' eines *negativen*, d. h. nach hinten gerichteten Abstandes geht, je nachdem die Projectionsstrahlen, von vorn nach hinten verfolgt (oder unter der Voraussetzung, dass die Beobachtung von *vorn* geschieht), von rechts oben, links oben, rechts unten, links unten kommen*), ebenfalls nach rechts oben, ...; und die eines positiven Abstandes hat den entgegengesetzten Sinn.

Es ist nun üblich, zunächst die Bestimmung über diesen Sinn zu treffen; meistens wird der erst genannte Fall genommen; ferner wird als Winkel $\alpha = \alpha_2$ der Schrägen mit der Projectionsaxe oder den Horizontalen ein leicht herzustellender genommen und auch dem Veränderungsverhältnisse $q = \operatorname{cotg} \sigma$ ein einfacher Werth gegeben, z. B. $\alpha = 30^0, 45^0$; $q = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$.

Eine Projection mit solchen einfachen Daten, mit denen schnell gearbeitet werden kann („projection rapide"), heisst *Cavalierperspective* (perspective cavalière).**)

Die zu den drei Werthen von q oder $\operatorname{cotg} \sigma$ gehörigen Werthe von $\frac{1}{\sin \sigma} = \sqrt{1 + q^2}$ sind $\frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2}$ oder 1,054; 1,118; 1,414.

---

*) In den beiden ersten Fällen wird, mit freilich der heutigen Terminologie nicht entsprechender Anwendung des Wortes Perspective, die schräge Projection auch *Vogelperspective* genannt, und in den andern, kaum gebrauchten, scherzhaft Froschperspective.

**) Die Projection mit $q = 1$ und $\alpha = 90^0$, bei der also die Schrägen in Verticalen übergegangen und die Projectionsstrahlen zu den auf Π senkrechten Verticalebenen parallel und unter 45^0 gegen Π geneigt sind, heisst, weil früher vielfach zur Darstellung von Festungswerken benutzt, Militärperspective.

Selbst noch im zweiten Falle ist die Ellipse mit den Halbaxen $\frac{r}{\sin\sigma}$ und r, in die sich ein zu den Projectionsstrahlen senkrechter Kreis projicirt, nicht sehr vom Kreise verschieden (obwohl die Brennpunkte eine ersichtliche Entfernung vom Mittelpunkte haben).

Man construire aus diesen Daten α und q die Richtung von p_1 und beweise die Relation: $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\sigma}{\cos\alpha}$, wo α_1 der Winkel von p_1 mit der Axe ist.

Von einem Würfel, der in Grund- und Aufriss sich als Quadrat darstellt, entwerfe man die schräge Projection für alle sechs Combina-

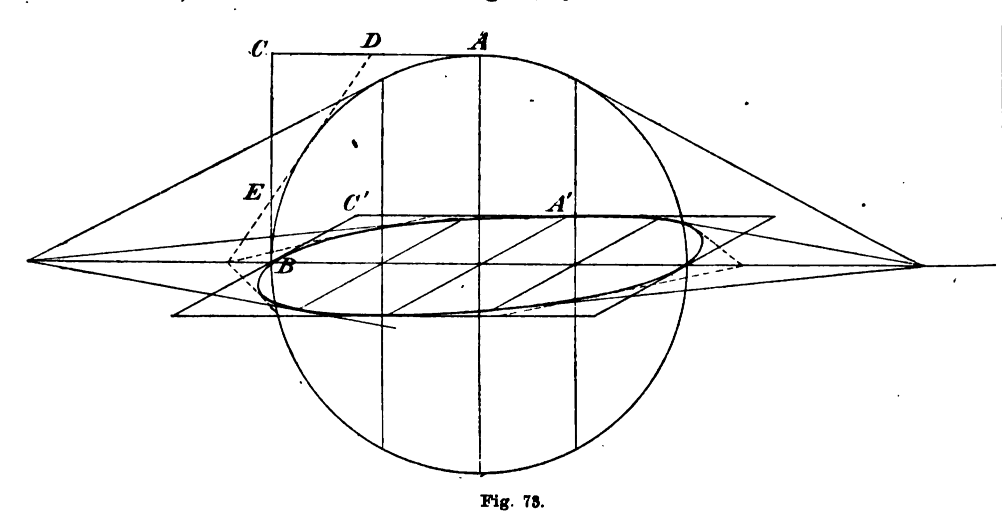


Fig. 73.

tionen der obigen α und q und vergleiche die Zeichnungen; ebenso mache man die schräge Projection des in Fig. 51 dargestellten Dodecaeders etwa für $\alpha = 30^0$, $q = \frac{1}{2}$.

Es genügt offenbar, wenn die Daten gegeben sind, die Orthogonalprojection des darzustellenden Punktes auf Π und seine Entfernung (Cote) von Π zu kennen. Danach ist in Fig. 73 ein horizontaler Kreis, ebenfalls für $\alpha = 30^0$, $q = \frac{1}{2}$, dargestellt. Zur Construction der Tangenten an die Projection ist die *Affinität* zwischen dieser und der Umlegung benutzt.*)

*) Es sind auch einige Tangenten folgendermassen construirt: Wenn auf zwei rechtwinkligen Tangenten AC, BC eines Kreises $AD = \frac{1}{2}AC$, $BE = \frac{1}{3}BC$ gemacht ist, so ist $DE = AD + BE$ auch Tangente; diese Theilungen aber lassen sich auch in der Projection vornehmen.

Der Mittelpunkt ist in Π angenommen; andernfalls handelt es sich um eine indirecte Umlegung: der Kreis ist zunächst um seinen zur Π parallelen Durchmesser in die Parallelebene zu Π gedreht und dann — congruent — parallel projicirt.

150. Wie wir die Orthogonalprojection auf *eine* Ebene durch die auf eine zweite vervollständigen mussten, um zu erreichen, dass die Elemente auch im Raume fixirt sind; so *können wir,* wenn wir nicht auf die ursprüngliche Zeichnung in Grundriss und Aufriss recurriren wollen, damit die neue Zeichnung von jener unabhängig sei, *die schräge Projection* in anderer Weise *vervollständigen, indem wir die schräge Projection des Grundrisses hinzufügen.* Man bildet also nicht blos $P_2 P$, sondern auch $P_a P_1$ ab, vermittelst der gleich langen und gleich gerichteten Schrägen $P_2 P'$, $P_a P_1'$ und erhält die *beiden* Projectionen P', P_1', welche — analog zu Nr. 42 — auf derselben Verticale liegen. Vermittelst zweier auf $g = (g_1, g_2)$ gelegten Punkte erhält man g', g_1', die beiden Projectionen von g. Sie treffen sich in der schrägen Projection der ersten Spur von g; die Spur in Π und der Schnitt von g_1' mit der Axe liegen vertical übereinander. Zwei Geraden g und l liegen in derselben Ebene, wenn die Schnitte $g'l'$ und $g_1'l_1'$ auf der nämlichen Verticale sich befinden (oder zugleich $g' \parallel l'$, $g_1' \parallel l_1'$ ist). Man construire P_1, P_2 aus P', P_1' und g_1, g_2 aus g', g_1'.

Die Spur einer Ebene in Π und die schräge Projection ihrer ersten Spur treffen sich auf der Axe.

151. Die schräge Projection ist die geeignetste für die Entwerfung *stereometrischer Figuren;* wegen der Erhaltung des Parallelismus und des einfacheren Construirens ist sie der Perspective vorzuziehen, und andererseits der Orthogonalprojection, weil, wie schon mehrfach bemerkt, bei dieser oft wichtige Bestandtheile des Objects nicht anschaulich zur Darstellung kommen.

So sind auch die Figuren 1—6, 11—14, 53, 54, 72 als schräge Projectionen anzusehen, mit einem ziemlich grossen Winkel α: die mit Π bezeichneten Ebenen sind horizontal, die begrenzenden Rechtecke haben ihre Seiten parallel und senkrecht zur verticalen Ebene der schrägen Projection; Π_2 in Fig. 12, 14 ist zu dieser parallel.

Wir schliessen hieran noch einige Bemerkungen über die Darstellung der *Kugel* und den sogenannten *Umriss.*

Der der Kugel umgeschriebene Cylinder, dessen Kanten den Projectionsstrahlen parallel sind, berührt sie längs desjenigen grössten Kreises U, dessen Ebene zu den Kanten senkrecht ist, und ist deshalb Rotationscylinder. Dieser Kreis ist *der wahre Umriss;* er trennt für den in der Richtung der Projectionsstrahlen Sehenden den sichtbaren

Theil der Oberfläche vom unsichtbaren. Der Schnitt dieses Cylinders mit Π oder die schräge Projection von U ist *der scheinbare Umriss* U', und *ihn haben wir bei der Darstellung der Kugel zu zeichnen. Er ist,* wenn r der Radius der Kugel und des wahren Umrisses ist, *die oben besprochene Ellipse mit den Halbaxen* $\frac{r}{\sin \sigma}$, r; *streng genommen ist er nur dann Kreis, wenn orthogonal projicirt wird,* aber bei kleinen Werthen von q (und von r), wie wir sahen, nicht ersichtlich vom Kreise verschieden; so dass, wenn in Lehrbüchern der Stereometrie oder der mathematischen Geographie als (scheinbarer) Umriss ein Kreis gezeichnet wird, auch wo ersichtlich *schräge* Projection vorliegt, der *theoretische Fehler* praktisch ohne Bedeutung ist, wofern es sich eben um ein kleines q handelt; z. B., wenn der Umriss einer Projection der Erdkugel durch die Pole geht, also Meridian ist und Aequator und Parallelkreise nicht geradlinig, sondern als schmale Ellipsen gezeichnet sind.

152. Wenn der wahre Umriss U eine auf der Kugelfläche verlaufende Curve C in dem Punkte P schneidet, so liegen die Tangenten von P an beide Curven U und C in der Berührungsebene τ der Kugel in P. Eine dritte Tangente der Kugel in P, die also auch in dieser Ebene liegt, ist die durch P gehende Kante des oben besprochenen der Kugel längs U umgeschriebenen Cylinders; da er U projicirt, so liegt die Tangente von U in P in der längs dieser Kante den Cylinder berührenden Ebene, die also zwei Geraden enthält, welche in τ liegen, daher mit dieser Berührungsebene identisch ist und auch die Tangente in P an C enthält. Als Berührungsebene des Cylinders ist sie aber eine projicirende Ebene, demnach gemeinsame für die beiden Tangenten in P an U und C; so dass dieselben die nämliche Projection haben und die Projectionen C' und U' sich in P' berühren. Folglich haben wir den Satz, der offenbar für jede Fläche und jede Projection gilt:

Sobald eine Curve auf einer Fläche den wahren Umriss schneidet, berühren sich der scheinbare Umriss und die Projection der Curve in der des Schnittpunktes.

Diese Eigenschaft wird sehr häufig in stereometrischen Zeichnungen vernachlässigt. Oft ist nur der sichtbare Theil einer auf der Fläche befindlichen Curve gezeichnet, aber so, dass er verlängert den Umriss nicht berührt, sondern schneidet; und bei vollständig gezeichneten Curven finden sich an den Stellen, wo die Berührung stattfinden soll, ganz unerklärliche Ecken: z. B. statt der Ellipse, die einen Kugelkreis darstellen soll, sind zwei sich auf dem Umrisse schneidende symmetrische Kreisbogen gezeichnet.

Für Fig. 74, Taf. VII, sind die Daten $\alpha = 30^0$, $q = 1$ angewandt, letzteres, um eine ersichtliche Umriss-Ellipse zu erhalten. Die Zeichnung der Kugel ist dann noch mit den Projectionen von Kreisen auf ihr, die zu Π parallel sind und in gleich grosse Kreise sich projiciren, erfüllt. Π sei durch den Mittelpunkt M gelegt, so dass der grösste 0 von jenen Parallelkreisen seine eigene Projection ist; er berührt die Umrissellipse U' in den Scheiteln der kleinen Axe. Der zu Π normale Durchmesser d, auf dem die Mittelpunkte der Kreise liegen, projicirt sich auf die durch $M \equiv M'$ gehende Schräge d' und zwar, wegen $q = 1$, in wahrer Länge, und ebenso die Entfernungen der Mittelpunkte der Kreise von M; so dass die Projectionen dieser Mittelpunkte auch als Umlegungen angesehen werden können*) und die Sehnen von 0, die durch die Projectionen senkrecht zu d' gehen, die Durchmesser der Kreise und ihrer Projectionen sind.

Es sind die Projectionen $0, 1', 2', 3', 4'$ von fünf Parallelkreisen $0, \ldots 4$ (auf der vorderen Seite) gezeichnet; in der Figur sind die Accente weggelassen und mit denselben Ziffern auch die Mittelpunkte bezeichnet. Der Kreis 1 schneidet U zweimal; die Projection $1'$ berührt daher U' zweimal, in den mit I′ bezeichneten Punkte. Jene Schnitte und diese Berührungen nähern sich, je weiter sich der Kreis vom grössten 0 entfernt; bei $2'$ sind die Berührungspunkte II′. Beim Kreise 3 haben sich die beiden Schnitte mit U vereinigt: er berührt U; bei $3'$ haben sich also die beiden Berührungen in eine vierpunktige Berührung im Scheitel III der grossen Axe vereinigt.**) Der Kreis 4 schneidet U nicht mehr und $4'$ hat keine (reelle) Doppelberührung mit U'. Die Parallelkreise gehen schliesslich über in zwei Punktkreise, die Endpunkte des Durchmessers d; ihre Projectionen sind hier bei $q = 1$ die Schnitte von d' mit 0; bei beliebigem q haben sie die Entfernung rq von M.***)

U' ist nur zur Hälfte ausgezogen, damit die Berührungspunkte besser zu sehen sind; die andere Hälfte kann leicht mit dem Auge ergänzt werden.

153. Für die Construction der Projectionen von *sphärischen Dreiecken* ist es wichtig, folgende Aufgabe zu lösen: *Es seien A', B' zwei Punkte innerhalb des scheinbaren Umrisses U' einer Kugel, die wir als*

---

*) Ein anderer Werth von q erfordert eine besondere Umlegung; doch kann diese leichte Modification dem Leser überlassen werden.

**) $3'$ ist der sogenannte Krümmungskreis von U' in III′, mit innigerer Berührung als sie Krümmungskreise in beliebigen Punkten der Curve haben, die nur dreipunktig tangiren.

***) Sie sind, da die Halbaxen $r\sqrt{1+q^2}$, r sind, die Brennpunkte von U'.



Projectionen von zwei Punkten der Kugel aufzufassen haben; die Ellipse genauer zu bestimmen, in die sich der durch diese Punkte gehende grösste Kugelkreis projicirt.

Die Lösung setzt freilich Kenntnisse voraus, die über den Rahmen dieses Buches hinausgehen; weshalb wir sie nicht vollständig erörtern können; wir glauben jedoch, die folgende Betrachtung nicht unterdrücken zu dürfen.

Ein grösster Kreis auf der Kugel schneidet U immer und zwar in den Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers; daher *berührt seine Projection den U' in den Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers.*

Und umgekehrt, *jede innerhalb U' befindliche Ellipse E', welche U' in den Endpunkten D', D_1' eines Durchmessers berührt,* der dann auch für sie Durchmesser wird, *ist Projection zweier grösster Kreise auf der Kugel, die sich in den Endpunkten des Durchmessers DD_1 von U schneiden.* Denn die Berührungsebenen des projicirenden Cylinders, der nach E' geht, längs der Kanten DD', D_1D_1' enthalten auch die Tangenten von U' in D', D_1' und berühren deshalb die Kugel in D, D_1. Folglich zerfällt der Schnitt von Kugel und Cylinder in zwei Kreise; ist nämlich P ein Punkt dieses Schnitts, so berührt der durch D, D_1 und P gehende Kreis auf der Kugel den Cylinder in D, D_1 und schneidet ihn in P und ist, nach einem Kegelschnitt-Satze, mit dem Kegelschnitte identisch, welchen seine Ebene aus dem Cylinder ausschneidet. Da jede Cylinderkante noch einmal die Kugel schneidet, so hat der volle Schnitt ausser diesem Kreise noch einen zweiten Bestandtheil, der sich als ein ebenfalls durch D, D_1 gehender Kreis vermittelst eines auf ihn gelegten Punktes herausstellt.

Die Punkte A', B' sind Projectionen von je *zwei* Punkten auf der Kugel; die auf dem sichtbaren Theile befindlichen seien A, B, die auf dem unsichtbaren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, und wir haben es eigentlich mit 4 grössten Kreisen zu thun, die bezw. durch A, B; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; A, $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{A}$, B gehen. Die beiden ersten liegen auf demselben projicirenden Cylinder und projiciren sich in die nämliche Ellipse, und ebenso die beiden letzten. Also kommt es darauf an, *durch A', B' zwei Ellipsen zu legen, welche U' in den Endpunkten eines Durchmessers berühren.*

Indem wir noch den zu dem einen der beiden Punkte, etwa zu A', in Bezug auf den Mittelpunkt M symmetrischen Punkt C' hinzunehmen, durch den beide Ellipsen gehen müssen, da M auch ihr Mittelpunkt ist, liegt die Aufgabe vor: *durch A', B', C' die Kegelschnitte zu legen, welche U' doppelt berühren.* Nach den Steiner-Schröter'schen Vorlesungen über synthetische Geometrie, § 52

(Nr. 256 der 3. Aufl.) giebt es deren vier, von denen aber nur zwei unserer Anforderung entsprechen. Die Berührungssehnen erhält man nach den dortigen Erörterungen folgendermassen: Auf jeder der drei Geraden $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ ergiebt sich eine hyperbolische Involution, von der die beiden verbundenen Punkte ein Paar und die Schnitte mit U' ein zweites bilden. Von den Doppelpunkten liegt einer im Innern, der andere aussen; die äusseren seien G, G', G'', die inneren H, H', H''; es liegen G, G', G''; G, H', H''; H, G', H''; H, H', G'' je in gerader Linie, und das sind die vier Berührungssehnen. Nun fällt aber H' offenbar in den Mittelpunkt M; also sind die zweite und vierte von ihnen Durchmesser; sie führen zu den beiden Ellipsen, die wir wünschen. Diese sind dann durch die Durchmesser-Endpunkte, ihre Tangenten und die beiden Punkte A', B' mehr als nothwendig bestimmt. Aus der Lage des Berührungs-Durchmessers ist leicht zu entscheiden, ob es sich um die Projection der beiden durch A, B, bezw. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, oder der durch A, $\mathfrak{B}$, bezw. $\mathfrak{A}$, B gehenden grössten Kreise handelt.

154. Bei Kegeln (und Cylindern) besteht der scheinbare Umriss aus Geraden, den Projectionen derjenigen Kanten, längs deren zu den Projectionsstrahlen parallele Tangentialebenen berühren; falls solche vorhanden sind. Schneidet eine Curve auf der Kegelfläche eine derartige Kante, so entspricht dem in der Projection Berührung.

Neunter Abschnitt.

Axonometrie.

155. Vom Anfangspunkte *O eines räumlichen Coordinatensystems* kann man bekanntlich nach einem beliebigen Punkte P (in sechs Weisen) einen Coordinatenzug führen, dessen drei Bestandtheile mit den Coordinaten von P in Grösse, Richtung und Sinn übereinstimmen. Kennt man also *die Parallelprojectionen der drei Axen und die Strecken, in welche eine bestimmte Strecke*, etwa die Längeneinheit, *je nachdem sie auf der x-, y-, z-Axe liegt* (oder ihr parallel ist), *sich projicirt*, so kann man für jeden Punkt, dessen Coordinaten bekannt sind, die Projection des Zuges construiren und so zu seiner Projection gelangen. In Nr. 149 ist das für ein System geschehen, von dem zwei Axen in der Projectionsebene $\Pi \equiv \Pi_2$ liegen, so dass zwei Theile des Zuges mit ihren Projectionen zusammenfielen und nur der dritte gezeichnet zu werden brauchte.

Lassen wir das Coordinatensystem, das wir jedoch *rechtwinklig* annehmen wollen, eine beliebige Lage zur Projectionsebene Π haben, so sei σ wieder der Winkel der Projectionsstrahlen mit Π, ξ, η, ζ diejenigen der Coordinatenaxen, $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ die Winkel, welche *eine auf die drei Axen gelegte Längeneinheit* mit den Projectionsstrahlen bildet, mit der genaueren Definition, wie sie in Nr. 148 gegeben wurde, *und* q_x, q_y, q_z *die Projectionen dieser Strecke*, so ist nach der dortigen Formel:

$$q_x^2 = 1 + \frac{\sin \xi^2}{\sin \sigma^2} - 2 \cos \lambda_x \frac{\sin \xi}{\sin \sigma},$$

$$q_y^2 = 1 + \frac{\sin \eta^2}{\sin \sigma^2} - 2 \cos \lambda_y \frac{\sin \eta}{\sin \sigma},$$

$$q_z^2 = 1 + \frac{\sin \zeta^2}{\sin \sigma^2} - 2 \cos \lambda_z \frac{\sin \zeta}{\sin \sigma};$$

daher:

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 3 + \frac{\sin \xi^2 + \sin \eta^2 + \sin \zeta^2}{\sin \sigma^2}$$

$$- 2 \frac{\cos \lambda_x \sin \xi + \cos \lambda_y \sin \eta + \cos \lambda_z \sin \zeta}{\sin \sigma}.$$

$90^0 - \xi$, $90^0 - \eta$, $90^0 - \zeta$ sind die Winkel des Lothes auf Π mit den Axen, daher

$$\sin \xi^2 + \sin \eta^2 + \sin \zeta^2 =$$
$$= \cos (90^0 - \xi)^2 + \cos (90^0 - \eta)^2 + \cos (90^0 - \zeta)^2 = 1$$

nach bekanntem Satze und:

$$\cos \lambda_x \sin \xi + \cos \lambda_y \sin \eta + \cos \lambda_z \sin \zeta =$$
$$= \cos \lambda_x \cos (90^0 - \xi) + \cos \lambda_y \cos (90^0 - \eta) + \cos \lambda_z \cos (90^0 - \zeta),$$

also gleich dem Cosinus des Winkels zwischen dem Lothe und dem Projectionsstrahlen nach ebenfalls bekannter Formel aus den Elementen der analytischen Geometrie des Raumes; der ist aber $90^0 - \sigma$. Und so ergiebt sich:

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 3 + \frac{1}{\sin \sigma^2} - 2 = 2 + \operatorname{cotg} \sigma^2.$$

Wird orthogonal projicirt, wie wir nun annehmen wollen, so ist:

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 2$$

oder

$$\cos \xi^2 + \cos \eta^2 + \cos \zeta^2 = 2;$$

was freilich aus: $\sin \xi^2 + \sin \eta^2 + \sin \zeta^2 = 1$ unmittelbar folgt.

Aus dieser Beziehung zwischen den drei Abkürzungs-Verhältnissen folgt, da sie $\leqq 1$ sind, dass *jedes von den drei Cosinusquadraten, oder,* was genügt, *das grösste kleiner sein muss, als die Summe der beiden andern. Und sind p, q, r drei zu den Abkürzungs-Verhältnissen proportionale Zahlen, so gilt dieselbe Bedingung für p^2, q^2, r^2.*

Aus der Beziehung und der Proportionalität folgt:

$$1 : \cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = s : p : q : r,$$

wo $s = \sqrt{\frac{p^2 + q^2 + r^2}{2}}$ ist und leicht construirt werden kann.

156. Wir stellen uns nun die Aufgabe, *wenn p, q, r der eben gefundenen Bedingung entsprechend gegeben sind, die Figur der Projection des Coordinatensystems zu construiren.* Es seien A, B, C die Schnitte der drei Coordinatenaxen mit Π, O' die Projection des Anfangspunktes O; so steht die Ebene AOO' senkrecht auf Π und der yz-Ebene, also auf der Schnittlinie BC; folglich gilt dies auch für ihre Spur $O'A$ in Π; diese ist Höhe von ABC, und $O'B$, $O'C$ sind die beiden andern Höhen.

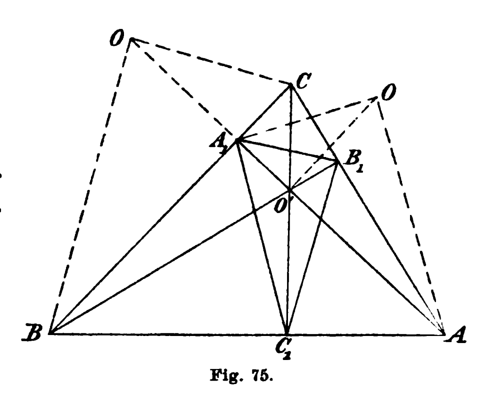


Fig. 75.

Die Projection des Anfangspunktes des Coordinatensystems ist daher Höhenpunkt des Spurendreiecks des Systems in der Projectionsebene, wofern orthogonal projicirt wird.

Das Dreieck der Höhenfusspunkte sei A_1, B_1, C_1 (Fig. 75); es ist bekannt, dass O' der Mittelpunkt des ihm eingeschriebenen Kreises ist; sein Radius sei ρ.

Weil $\triangle O'CB \backsim O'B_1C_1$, so ist $B_1C_1 = \frac{\rho \cdot BC}{O'A_1}$; die beiden rechtwinkligen Dreiecke BOC und AOA_1 mit den Höhen OA_1 und OO' (deren Umlegungen in der Figur gezeichnet sind) liefern:

$$BC = \frac{OB \cdot OC}{OA_1}, \quad OA_1 = \frac{OO' \cdot OA}{O'A}, \quad O'A_1 = \frac{OA_1 \cdot OO'}{OA};$$

also:

$$B_1C_1 = \rho \cdot \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{\overline{OO'}^3}\left(\frac{O'A}{OA}\right)^2$$

$$= \rho \cdot \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{\overline{OO'}^3} \cdot \cos\xi^2;$$

daher:

$$B_1 C_1 : C_1 A_1 : A_1 B_1 = \cos \xi^2 : \cos \eta^2 : \cos \zeta^2 = p^2 : q^2 : r^2;$$

woraus ebenfalls die Bedingung für p, q, r sich ergiebt.

Stellt man also ein Fusspunktendreieck her, dessen Seiten dieser Proportion genügen, so geben die von den Ecken nach dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises gezogenen Strahlen die gewünschte Projection des Coordinatendreikants. Man pflegt sie dann so zu legen, dass die Projection der z-Axe vertical ist, gewöhnlich positiv nach oben, während die positive x-Axe nach rechts, die positive y-Axe nach links geht. Für p, q, r werden nicht zu grosse ganze Zahlen genommen; und die axonometrische Projection heisst *isometrisch, dimetrisch* (monodimetrisch),

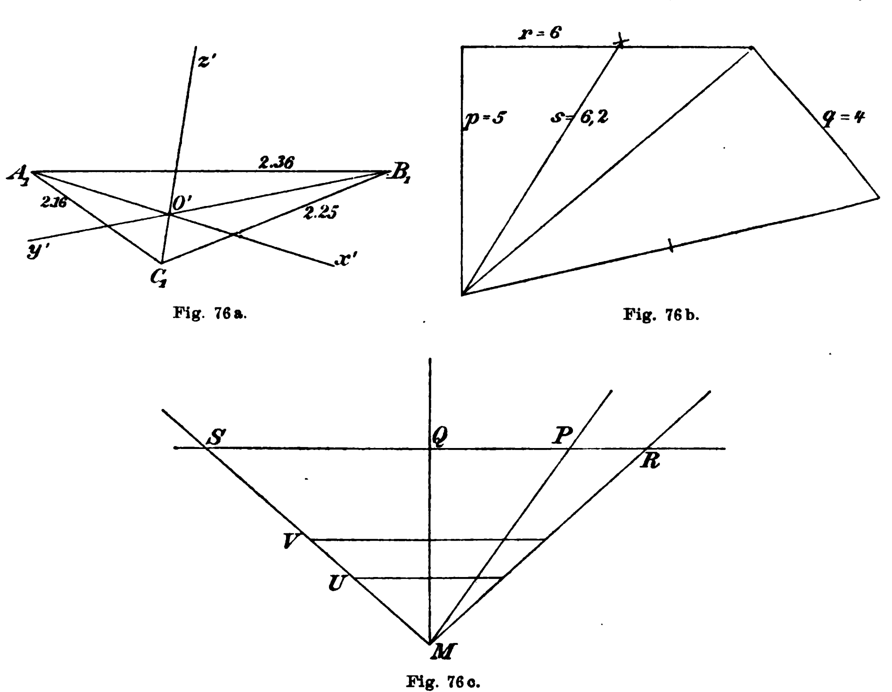


Fig. 76a.

Fig. 76b.

Fig. 76c.

trimetrisch (anisometrisch), wenn alle drei Zahlen gleich oder nur zwei oder alle ungleich sind. Die dimetrische (7, 7, 8) führt zu $s = 9$; es wäre interessant, noch andere (der obigen Bedingung genügende) Gruppirungen zu ermitteln, die zu einem rationalen s führen.

In Fig. 76a ist die Projection des Axendreikants für $p = 5$, $q = 4$, $r = 6$ construirt und in Fig. 76b dazu s hergestellt, was nahezu 6,2 ist.

157. Um sodann *die verkürzten Massstäbe* zu erhalten, *welche den Projectionen der Coordinaten* entsprechen, ziehe man aus einem Punkte

M nach einer Gerade vier Strecken $M(P, Q, R, S)$, die sich wie $p:q:r:s$ verhalten, und überträgt jede auf MS gelegte Strecke durch Parallelen zu der Gerade auf MP, MQ, MR, je nachdem sie eine x-, y- oder z-Coordinate ist. Hat man viele Coordinaten zu verkürzen, so lohnt es sich, auf MS einen möglichst genauen Massstab zu legen und zu übertragen. In Fig. 76c sind diese Massstäbe für 5, 4, 6 construirt und $SU = 4$ cm ist übertragen, so wie SV, die halbe Diagonale 2,83 cm des Quadrats über SU.

Diese Daten 5, 4, 6 sind den Figuren 77—79 zu Grunde gelegt.

Mit den verkürzten Coordinaten wird dann parallel zu den Projectionen der Axen die Projection des Coordinatenzugs jedes Punktes, den man darstellen will, construirt.

Umgekehrt kann man den Axen parallele Längen eines dargestellten Gegenstandes aus der Zeichnung mit Hilfe der verkürzten Massstäbe entnehmen.

158. Diese axonometrische Herstellung der Projection eignet sich besonders, wenn am darzustellenden Gegenstande drei zu einander rechtwinklige Richtungen sich auszeichnen und also viele den Axen parallele Längen auftreten, wodurch die Construction der Coordinatenzüge sich vereinfacht; wie vielfach bei Bauwerken, Maschinen, Polyedern (Krystallen). In Fig. 77 ist ein Archimedisches Polyeder dargestellt: *das abgestumpfte Hexaeder*, das von sechs regelmässigen Achtecken in den Hexaederflächen, von denen vier abwechselnde Seiten auf den Quadratseiten liegen, und von acht regelmässigen Dreiecken eingeschlossen ist, welche die Hexaederecken abstumpfen. Die 24 neuen Ecken erhält man, indem man auf jeder Kante des Hexaeders von beiden Endpunkten aus die halbe Quadratdiagonale aufträgt. Also handelt es sich bei der Construction nur um die zwei Längen SU, SV und ihre Verkürzungen, die oben construirt worden sind.

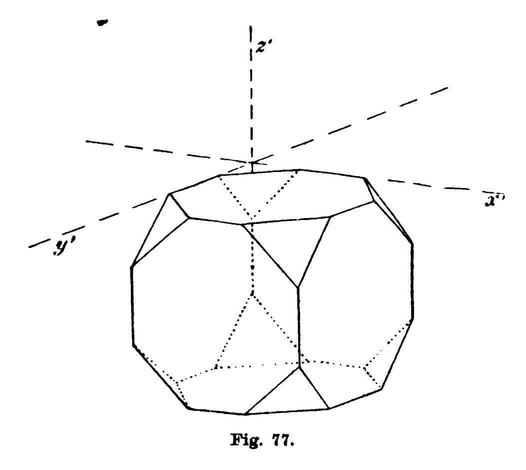


Fig. 77.

Die Figur zeigt, dass zwei abstumpfende Dreiecke sehr schmal zu stande kommen; so dass die Projection mit diesen Daten 5, 4, 6 einen kleinen Mangel für die Darstellung unseres Polyeders hat und

sich für die Darstellung eines Octaeders, mit dessen Flächen ja die abstumpfenden Ebenen parallel sind, nicht empfehlen würde.

Wollen wir daher z. B. dasjenige Polyeder darstellen, das durch Aufsetzen von regelmässigen Tetraedern auf die Flächen eines Octaeders entsteht, so werden wir besser andere Zahlen für p, q, r wählen, jedenfalls aber drei verschiedene; denn bei der isometrischen oder dimetrischen Projection entsteht eine symmetrische Figur, und es finden Coincidenzen von Projectionen verschiedener Kanten statt, die das Aussehen beeinträchtigen. Im übrigen hat man es bei diesem Polyeder nur mit einer einzigen Strecke und ihren Verkürzungen zu thun, nämlich der Entfernung c der Octaeder-Ecken vom Mittelpunkt; diese Ecken selbst sind unmittelbar einzutragen. Die acht andern Ecken haben alle drei Coordinaten $\pm c$.

Liegt von einem Gebilde Grundriss und Aufriss vor, so wird man wieder, wie in Nr. 149, dem Coordinatensystem die Lage geben, dass die xy- und die xz-Ebene in die Π_1 und Π_2 fallen, so dass die Co-

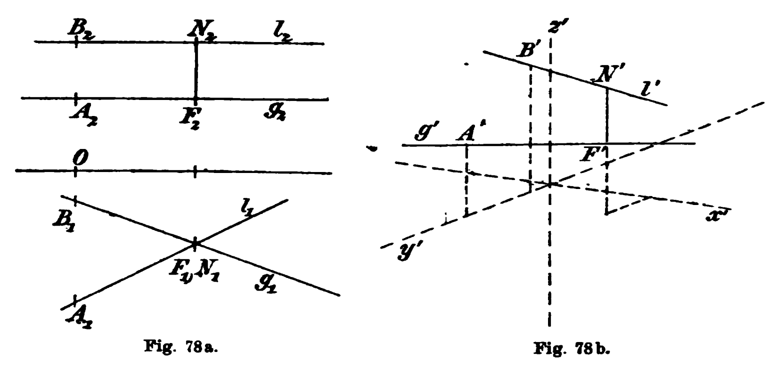


Fig. 78a. Fig. 78b.

ordinaten aus diesen unmittelbar abgegriffen werden können. In Fig. 78a sind in Grundriss und Aufriss zwei windschiefe Geraden g, l, in der bequemen Lage: parallel zu Π_1 (Nr. 32), und ihr kürzester Abstand FN dargestellt; Fig. 78b giebt die axonometrische Projection, bei der die Coordinatenzüge von A, B, F, N construirt und diese Punkte so gewählt sind, dass möglichste Vereinfachung statt hat. Man behandle andere Figuren der Stereometrie in ähnlicher Weise.

Fig. 79a und b, Taf. V, zeigt Grundriss und Aufriss und axonometrische Projection zweier in einander verzapfter Balken, die jedoch in letzterer auseinander genommen sind. Man entwerfe von demselben Objecte auch eine Cavalierperspective.

Von mehreren Strecken (oder Kräften) seien die Projectionen auf die Coordinatenaxen gegeben; man zeichne die axonometrische Projection ihres Polygons.

159. In einer beliebigen Ebene E haben wir ebenfalls ein Spurendreieck XYZ des Coordinatensystems; seine (axonometrische) Projection $X'Y'Z'$ liegt zum Spurendreieck ABC in Π perspectiv mit O' als Centrum (Nr. 119). Die Axe der Perspectivität ist die Spur EΠ. Denn BC und YZ, beide in der yz-Ebene gelegen, schneiden sich, und der Schnittpunkt ist, weil BC in Π liegt, Spur von YZ und daher auch auf $Y'Z'$ befindlich, also auch Schnittpunkt $(BC, Y'Z')$; durch ihn geht EΠ und ebenso durch $(CA, Z'X')$, $(AB, X'Y')$.

Rührt $X_1'Y_1'Z_1'$ von E_1 her, so sind auch $X'Y'Z'$ und $X_1'Y_1'Z_1'$ perspectiv, ebenfalls mit O' als Centrum, während die Projection von EE_1 die Axe ist.

Es sei P_1 der Grundriss von P in der xy-Ebene (Grundebene), der mit ihm in x, y übereinstimmt, während sein z null ist, so wollen wir die axonometrische Projection P_1' von P_1, die sich, wenn die Reihenfolge x, y, z gewählt wird, bei der Construction von P' ergiebt, die *Grundrissprojection von P* nennen. Ersichtlich liegen P' und P_1' in derselben Verticale. Ebenso haben wir die beiden Projectionen g', g_1' von g; ihr Schnitt ist die Projection des Durchgangspunktes von g durch die Grundebene. Die axonometrische Projection eines ebenen Feldes und die seines Grundrisses sind *affin;* die Affinitätsstrahlen sind vertical; Axe ist die Projection der Schnittlinie der Ebene des Feldes mit der Grundebene.

Wir wollen in der Grundebene (oder allgemeiner in einer Ebene, welche die Stellung einer Coordinatenebene hat) rechte Winkel construiren. Man trage auf der Projection der x-Axe die Strecken $O'\mathfrak{A}'$, $O'\mathfrak{A}_1'$ nach beiden Seiten und auf der der y-Axe die Strecke $O'\mathfrak{B}'$ auf, so dass sie sich wie $p:p:q$ verhalten, also $O\mathfrak{A} = O\mathfrak{A}_1 = O\mathfrak{B}$ ist. Wenn $\mathfrak{D}'$ auf $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ liegt, $\mathfrak{F}'$ so auf dieser Gerade construirt wird, dass $\mathfrak{A}'\mathfrak{F}' = \mathfrak{D}'\mathfrak{B}'$ (und $\mathfrak{F}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{D}'$), und $\mathfrak{F}'\mathfrak{E}' \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'$ gezogen wird bis $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}'$, so ist $\mathfrak{D}'O'\mathfrak{E}'$ Projection eines rechten Winkels; und wenn die Projection des einen Schenkels eines rechten Winkels in der Grundebene (oder einer Parallelebene) zu $O'\mathfrak{D}'$ parallel ist, so ist die des andern zu $O'\mathfrak{E}'$ parallel.

Von einer Ebene E sei s die Spur in Π und s_1' die Projection ihrer Spur s_1 in der Grundebene, also die obige $X'Y'$. Ist $P = (P', P_1')$ ein Punkt, so führt man, wenn g durch P senkrecht zu E gezogen werden soll, g' durch P' *geometrisch* senkrecht zu s und g_1' durch P_1' nach der eben geschilderten Construction *projectiv* senkrecht zu s_1' (Nr. 59).

160. Als *Fundamentalsatz der Axonometrie* (Satz von Pohlke) wird der Satz bezeichnet, der die Möglichkeit ausspricht, *ein Tetraeder ABCD in ein vollständiges Viereck parallel zu projiciren, welches einem*

gegebenen $A_1 B_1 C_1 D_1$ *ähnlich ist.* Wir wollen uns begnügen, die Frage in eine *einfachere* umzuformen.

Es seien

$$Q_1 = (A_1 B_1, C_1 D_1), \quad R_1 = (B_1 C_1, A_1 D_1), \quad S_1 = (A_1 C_1, B_1 D_1)$$

die drei Diagonalpunkte von $A_1 B_1 C_1 D_1$; man construirt dann auf den Kanten AB, CD, BC, AD, AC, BD des Tetraeders die Punkte Q, Q', R, R', S, S', welche sie nach denselben Verhältnissen theilen, wie jene Diagonalpunkte die gleichnamigen Seiten des Vierecks. Dann lässt sich beweisen, dass die drei Verbindungslinien QQ', RR', SS' oder q, r, s parallel sind. Den von ihnen gebildeten prismatischen Raum hat man nun in einem mit $Q_1 R_1 S_1$ ähnlichen Dreieck $Q_2 R_2 S_2$ zu schneiden, was, da der Normalschnitt $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ des Raumes als bekannt anzunehmen ist, sich leicht in die Aufgabe umwandeln lässt, $Q_1 R_1 S_1$ orthogonal in ein Dreieck zu projiciren, welches dem $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ ähnlich ist. Auf diese Aufgabe ist somit die gegebene zurückgeführt.

Ist $Q_2 R_2 S_2$ gefunden, so giebt es nur ein Viereck $A_2 B_2 C_2 D_2$, für welches Q_2, R_2, S_2 Diagonalpunkte sind, und zwar so, dass sie die Seiten von $A_2 B_2 C_2 D_2$ nach denselben Verhältnissen theilen, wie die Ecken des ähnlichen Dreiecks $Q_1 R_1 S_1$ die von $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Das Viereck $A_2 B_2 C_2 D_2$ ist dem $A_1 B_1 C_1 D_1$ ähnlich.*)

Das Coordinaten-Dreikant $D(A, B, C)$ ist dann in den Dreistrahl $D_2(A_2, B_2, C_2)$ projicirt, der zu $D_1(A_1, B_1, C_1)$ ähnlich oder, wenn es sich blos um die Strahlen handelt, congruent ist.

Jene Aufgabe löst man vermittelst der Affinität folgendermassen: Es sei $Q_0 R_0 S_0$ das gegebene zu projicirende Dreieck, in die Projectionsebene Π gelegt, und mit $Q' R_0 S_0$ soll die Projection ähnlich sein. Der Kreis durch Q_0 und Q', welcher seinen Mittelpunkt auf $R_0 S_0$ hat, schneide diese Gerade in T_0 und U, so dass UQ_0T_0 und $UQ'T_0$ rechte Winkel sind. Bei U sei $\sphericalangle Q_0UT_0 > Q'UT_0$; während $Q_0T_0U < Q'T_0U$. Man mache $\sphericalangle Q_0UT_1 = Q'UT_0$, wo T_1 auf Q_0T_0 liegt, suche in der Affinität, von welcher UQ_0 die Axe und T_0 und T_1 entsprechende Punkte sind, die den R_0, S_0 entsprechenden Punkte R_1, S_1 (auf UT_1); Q_1 deckt sich mit Q_0. Die ganze Figur $UQ_1R_1S_1T_1$ ist ähnlich der $UQ'R_0S_0T_0$, also insbesondere ist $\triangle Q_1R_1S_1 \sim Q'R_0S_0$. Folglich muss das gegebene Dreieck in einer Ebene liegen, deren Spur in Π die Gerade UQ_0 (oder zu ihr parallel) und deren Neigungswinkel α gegen Π gegeben ist durch: $\cos\alpha = \frac{Q_1T_1}{Q_0T_0}$.

*) Weiteres sehe man in Reye's Aufsatz in Bd. XI der Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.



Zehnter Abschnitt.

Schatten und Beleuchtung.

161. Es ist schon mehrfach gelegentlich bemerkt worden, dass, der *Schatten*, der von einem Punkte, einer Linie auf eine Ebene geworfen wird, nichts anderes ist, als die Projection des Punktes, der Linie aus dem endlichen oder unendlich fernen Lichtpunkte; und auf leuchtende *Punkte* wollen wir unsere Betrachtung beschränken.

In dem Punkte, in dem eine Gerade, nöthigenfalls verlängert, *die auffangende Ebene trifft, begegnet sie sich mit dem* ebenfalls eventuell verlängerten *Schatten;* ist sie zur Ebene parallel, so ist ihr Schatten mit ihr parallel. *Eine zur auffangenden Ebene normale Gerade wirft auf sie Schatten, der durch die Orthogonalprojection des leuchtenden Punktes auf die Ebene geht, bezw., wenn dieser unendlich entfernt ist, der Orthogonalprojection der Lichtstrahlen parallel ist;* oder allgemeiner, wenn die Gerade beliebig gerichtet ist, so hat man den leuchtenden Punkt, bezw. die Lichtstrahlen in ihrer Richtung zu projiciren.

162. Wenn der leuchtende Punkt unendlich fern ist, so ist auf den parallelen Lichtstrahlen der Sinn des Lichtes anzugeben; nur der unendlich ferne Punkt auf der einen Seite ist leuchtend. Trifft ein Lichtstrahl, vom leuchtenden Punkte aus durchlaufen, auf einen Körper, so hört seine Fähigkeit, Licht zu bringen, auf; der Treffpunkt befindet sich auf *der beleuchteten Seite* der Oberfläche des Körpers. Der nächste Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der Oberfläche befindet sich in dem *Eigenschatten* des Körpers (ombre propre). Trifft dann weiter derselbe Lichtstrahl zum ersten Male die Oberfläche eines zweiten Körpers, so haben wir einen Punkt innerhalb des *Schlagschattens,* den der erste auf den zweiten wirft, und ein zweiter Schnittpunkt gehört dann wieder dem Eigenschatten des zweiten Körpers an. Es könnte sein, dass diese beiden Punkte dritter und vierter Schnitt mit der Oberfläche des ersten Körpers sind, so dass jener dem Schlagschatten angehört, den der erste Körper auf sich selber wirft. Doch mit derartigen Körpern, deren Oberfläche von einer Gerade mehr als zweimal getroffen werden kann, wollen wir uns nicht beschäftigen.

Vereinigen sich die beiden Schnitte mit der Oberfläche des ersten Körpers, so *berührt* der Lichtstrahl dieselbe oder, wenn der Körper ebenflächig ist, *streift* sie auf einer Kante, d. h. trifft diese, ohne jedoch in das Innere einzudringen. Bei einer gekrümmten Oberfläche, beispielsweise einer Kugel, sind solche Lichtstrahlen die Kanten des ihr aus dem leuchtenden Punkte umgeschriebenen Berührungskegels

bezw. -cylinders, und die Berührungscurve — der wahre Umriss, wenn aus dem leuchtenden Punkte projicirt wird — bildet *die Trennungslinie zwischen dem beleuchteten Theile der Oberfläche und dem Eigenschatten,* die sogenannte *Schattengrenze.* Bei einem Polyeder besteht sie aus einem geschlossenen Zuge von Kanten.

Der Schatten, den diese Linie auf den zweiten Körper wirft, bildet *den Umriss des Schlagschattens* auf dessen Oberfläche. Berührt oder streift ein nach einem Punkte dieses Umrisses gehender Lichtstrahl in ihm die Oberfläche dieses Körpers, also auf dessen Schattengrenze, so verlässt der Schagschatten diese Oberfläche, um abspringend auf der eines andern Körpers sich fortzusetzen.

Schlagschatten fällt auf den Theil der Oberfläche des zweiten Körpers, der beleuchtet sein würde, wenn der erste nicht da wäre, und der Schlagschattenumriss, soweit er auf der Oberfläche des zweiten zu stande kommt, theilt diesen Theil von neuem in zwei Theile, einen, der beleuchtet bleibt, und einen andern, der durch den Schlagschatten verdunkelt wird.

163. Bei einer Darstellung in Grundriss und Aufriss *werden die beiden Projections-Halbebenen* Π_1^+ *und* Π_2^+ *auch als Schatten auffangend angesehen.* Ein Hauptgrund für die Einführung des Schattens ist, dass auch aus ihm auf die Gestalt der dargestellten Objecte geschlossen werden kann und so die Anschaulichkeit der Darstellung erhöht wird. Dazu tragen die auf jene Halbebenen geworfenen Schatten mit bei. Π_1^- wird durch Π_2^+, Π_2^- durch Π_1^+ verdeckt.

Es ist allgemeiner Gebrauch, *bei parallelem Lichte den unendlich fernen Lichtpunkt links vorn oben so anzunehmen, dass die Projectionen* l_1, l_2 *eines Lichtstrahls beide mit der Axe einen Winkel von* 45^0 *bilden* und l_1 von links vorn, l_2 von links oben kommt. Die beiden Spuren von l liegen dann — bei vereinigten Π — auf derselben Parallele zur Axe, und es befindet sich nur eine von ihnen in einer positiven Halbebene. Diese wird Schlagschatten eines auf l befindlichen Punktes, falls nicht schon vorher ein anderer Körper getroffen wird. Die andere wird *„virtueller“* Schatten, der aber für die Construction oft erforderlich ist.

164. Entwirft man den Schatten aller Kanten eines Polyeders auf eine der Projectionsebenen, unbekümmert, ob auch alle diese Schatten zu stande kommen, so erhält man, ähnlich wie in Nr. 107, ein Netz von Figuren, das aus zwei übereinander lagernden „Blättern“ besteht; das obere Blatt entspricht den beleuchteten Flächen, das untere den im Eigenschatten befindlichen. Die Schatten der Kanten, aus denen die Trennungslinie besteht, bilden den Umriss der ganzen Schatten-

figur, welcher den Uebergang vom obern zum untern Blatt vermittelt. *Dadurch wird im allgemeinen die Trennungslinie am einfachsten festgestellt.*

In Fig. 80 (Taf. VII) z. B. lehrt der Schlagschattenumriss auf Π_1, dass $ABED$ die Schattengrenze ist und der beleuchteten Seite ABE und DAE angehören.

Man bestimme für das in Fig. 51 gezeichnete Dodecaeder die Schattengrenze und den auf Π_1^+ und Π_2^+ geworfenen Schatten.

Es habe von den zwei Endpunkten D, E einer Kante (Fig. 80) D auf Π_1^+ einen wirklichen Schatten D', also einen virtuellen D'' auf Π_2^-, dagegen E einen wirklichen E'' auf Π_2^+ und einen virtuellen E' auf Π_1^-, dann schneiden sich $D'E'$ und $D''E''$ auf der Axe a, in dem Punkte T, in dem sie von der durch DE parallel den Lichtstrahlen gelegten Ebene geschnitten wird; Schatten von DE ist die *gebrochene* Linie $D'TE''$. Der Schlagschatten, den die Pyramide $ABCDE$ auf beide Halbebenen wirft, ist $A'B'UE''TD'$.

165. Wir wollen den Schatten von folgendem zusammengesetzten Körper construiren. Ein quadratisches Prisma $ABCD\mathfrak{ABCD}$ (Fig. 81, Taf. VII) steht auf der Projectionsebene Π_1; auf seiner Deckfläche steht eine abgestumpfte Pyramide $EFG\mathfrak{EFG}$ mit einem gleichseitigen Dreiecke als Grundfläche und auf deren Deckfläche liegt ein Prisma $HIKLMN\mathfrak{HIKLMN}$ über einem regelmässigen Sechsecke; alle sechs horizontalen Flächen haben ihre Mittelpunkte in derselben Verticale. Es sollen die Schlagschatten gezeichnet werden, die alle auf die Projectionsebenen und die höheren auf die niedrigeren werfen. Die verticalen Kanten der beiden Prismen werfen auf Π_1 Schatten, welche zu l_1 parallel sind; da nun die Geraden von der Richtung l_1 durch B, D, K_1, N_1 die ersten Projectionen der Prismen streifen, so erhellt, dass $B\mathfrak{B}, D\mathfrak{D}, K\mathfrak{K}, N\mathfrak{N}$ zu den Schattengrenzen derselben gehören; daher ist ersichtlich $B\mathfrak{BCD}DA$ die Schattengrenze des untern Prismas und $K\mathfrak{KLMN}NHI$ diejenige des obern. Wir construiren also den auf die Projectionsebenen geworfenen Schatten dieser Linien, die Schlagschattenumrisse, die vollständig zu stande kommen würden, wenn nicht die andern Körper da wären. Der erste dieser Umrisse fällt auf Π_1^+ und ist $B\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'DA$, der andere fällt auf Π_2^+ und ist $K''\mathfrak{K}''\mathfrak{L}''\mathfrak{M}''\mathfrak{N}''N''H''I''$. Es muss $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' \# BC$, $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}' \# CD$ sein, und im andern Umrisse sind jede zwei Gegenseiten gleich und parallel. Nun entwerfen wir die Schatten der drei Seitenkanten der Pyramide; sie sind in Π_1: $E'\mathfrak{E}'$, $F'\mathfrak{F}'$, $G'\mathfrak{G}'$; da sie die Axe bei e, f, g schneiden, so wird jeder dieser Schlagschatten gebrochen, bezw. noch $\mathfrak{E}''$, $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{G}''$. Die Lage der Linien lehrt, dass $F'f\mathfrak{F}''$, $G'g\mathfrak{G}''$ zum

Umrisse gehören, und also $F\mathfrak{F}$, $G\mathfrak{G}$ zur Schattengrenze. $E\mathfrak{E}$ befindet sich auf der beleuchteten Seite und keine Seitenkante der Pyramide innerhalb des Eigenschattens. Man wird bei einer Pyramide mit mehr Kanten den Schatten der Spitze in der Ebene der Grundfigur construirend und von ihm an diese die streifenden Geraden ziehend, so die zur Schattengrenze gehörigen Seitenkanten feststellen; von den im Eigenschatten befindlichen Seitenkanten hat man nicht nothwendig, die Schatten zu zeichnen. Dass man sich bei unserer Pyramide nicht mit den Schatten der Grund- und Deckfigur zu beschäftigen braucht, bedarf wohl keiner Erörterung.

Nun sehen wir, dass der Schatten von $F\mathfrak{F}$ in O' sich mit dem von $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ schneidet; dies lehrt, dass der nach O' gehende Lichtstrahl die Kante $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ streift. Wir gehen, entgegengesetzt dem Sinne des Lichts, von O' nach dem Streifpunkte O zurück und zwar, weil O' auf Π_1 geworfen ist, in dieser Projectionsebene, und erkennen, dass der Schatten von $F\mathfrak{F}$ zunächst auf die Deckfläche des untern Prismas fällt, längs FO, bei O auf die Projectionsebene abspringt nach O' und längs $O'f\mathfrak{F}''$ verläuft, jedoch nicht wirklich bis $\mathfrak{F}''$ reicht, wie wir gleich sehen werden. Ingleichen läuft der Schatten von $G\mathfrak{G}$ zunächst auch auf jener Deckfläche von G nach P, um da nach P' auf $\Pi_1{+}$ abzuspringen.

Der Umriss des Schlagschattens des oberen Prismas schneidet die Schatten von $G\mathfrak{G}$, $E\mathfrak{E}$, $F\mathfrak{F}$, und zwar die auf $\Pi_2{+}$ fallenden Theile, in Q'', R'', T''. Dies lehrt, dass derjenige Theil der Schattengrenze dieses Prismas, der dem Theile $Q''R''T''$ des Umrisses entspricht, nicht auf $\Pi_2{+}$, sondern auf die beleuchtete Seite der Pyramide Schatten wirft. Wir gehen also, zunächst in der zweiten Projection, in der Richtung der Lichtstrahlen zurück zu den Punkten Q, R, T auf den Kanten $G\mathfrak{G}$, $E\mathfrak{E}$, $F\mathfrak{F}$. Aber zwischen R'' und T'' befindet sich die Ecke I''; also muss auch der auf die Fläche $E\mathfrak{E}F\mathfrak{F}$ fallende Schatten gebrochen sein. Wir schneiden $R''I''$ mit $\mathfrak{F}''f$ und $T''I''$ mit $\mathfrak{E}''e$ in S'' und U'', übertragen diese Punkte in der Lichtrichtung auf $F\mathfrak{F}$ und $E\mathfrak{E}$ nach S und U; der gesuchte Brechungspunkt I^* ist der Schnitt von RS und TU; seine Verbindungslinie mit I'' ist den Lichtstrahlen parallel, was man controllire. Die erste Projection dieses Schattenzuges QRI^*T, durch Herablothen erhalten, ist unsichtbar, zieht sich dicht an $\mathfrak{G}_1\mathfrak{E}_1\mathfrak{F}_1$ hin und bringt die Brechungsstelle kaum zur Erscheinung.

Sonach besteht der ganze Schlagschatten-Umriss aus vier Linien, der eben erwähnten Linie QRI^*T auf dem Pyramidenmantel, den beiden

Geraden FO, GP auf der Deckfläche des untern Prismas und dem auf die Projectionsebenen fallenden Schatten

$$B\mathfrak{B}'O'fT''K''\mathfrak{K}''\mathfrak{L}''\mathfrak{M}''\mathfrak{N}''N''H''Q''gP'\mathfrak{D}'D.$$

166. *Endlich möge der perspectivischen Zeichnung* Fig. 71 (Taf. VI) *noch Schatten hinzugefügt werden.* Paralleles Licht wird durch den Fluchtpunkt L' der Lichtstrahlen dargestellt. Wenn eine verticale Gerade auf eine horizontale Ebene Schatten wirft, so fällt der Fluchtpunkt des Schattens auf die Horizontale und ist der Schnitt L_1' derselben mit der Verticale durch L'; denn diese ist die Fluchtgerade der Ebene, welche durch die verticale Gerade parallel den Lichtstrahlen geht und den Schatten in die horizontale Ebene schneidet. Wir nehmen von links vorn oben einfallendes Licht und haben daher L' und L_1' rechts zu zeichnen, L' unter der Horizontale. Nur L_1' ist in der Figur vorhanden, L' liegt zu tief, ist aber gegeben durch die Verticale von L_1' und die durch Q' gehende Gerade b', das Bild des Lichtstrahls durch Q. Zur Schattengrenze gehört ersichtlich PQ. Sie wirft zunächst auf die Grundebene Schatten, dessen Bild von P' nach L_1' flieht. Er reicht nur bis zur unteren Kante der ersten Stufe, bis B; nun wirft die verticale Linie auf eine verticale Ebene Schatten; dieser und sein Bild $B'C'$ sind vertical; $C'E'$ flieht wieder nach L_1'. Der Endpunkt E' ergiebt sich aber durch einen schleifenden Schnitt und bedarf einer Controlle, die bei der nächsten Stufe in gleicher Weise vorzunehmen ist. Die beiden Schatten PB, CE sind parallel und gleich; projiciren wir daher ihre Bilder aus einem Fluchtpunkte auf a, etwa F', auf die Horizontalen durch P', H', die Bilder der Schnitte der beiden horizontalen Ebenen, in denen PB, CE liegen, mit der Frontebene durch PQ, so müssen gleichlange Strecken sich ergeben.

Wir setzen die obige Construction fort, bis wir mit G' auf die b' gelangen. G ist der Schatten von Q, und schattenwerfend ist nunmehr die Kante QX, welche F' zum Fluchtpunkt hat. Die verticale Ebene, in welcher zuletzt der Schatten verlief, wird von QX in Y getroffen; nach Y muss also der weitere Schatten GM verlängert gehen. Der Schatten auf der nächsten horizontalen Ebene ist der schattenwerfenden Linie parallel, also geht — das sehr kurze — Bild $M'I'$ nach F', um dann wieder auf der folgenden verticalen Ebene nach dem zu Y analogen Punkte gerichtet zu sein ($J'K'$). Nun kommt der Schatten auf einer unsichtbaren Stufe, der jedoch gezeichnet werden muss, weil nachher wieder sichtbarer Schatten kommt. Der sehr kurze unsichtbare Schatten flieht im Bilde ($K'S'$) nach F'; er ist zu begrenzen auf der hinteren Kante der horizontalen Stufenfläche, deren

(unsichtbares) Bild durch einige Striche angedeutet ist. Schliesslich sind wir in einer durch X gehenden verticalen Ebene angelangt und haben den — zunächst noch eine kleine Strecke unsichtbaren — Schatten nach X zu ziehen. Die Schattenlinie ist also von G ab: $GMJKSX$.

Es verbleibt noch der Schatten, den der rechte Pfeiler auf die Grundebene wirft. Die Kante UN wirft einen Schatten, der im Bilde nach L_1' flieht, und bis zum Schnitte mit dem Lichtstrahle durch N reicht; die horizontale Kante NO wirft einen Schatten, dessen Bild F' zum Fluchtpunkte hat; er reicht bis zum Lichtstrahle durch O. Nehmen wir an, dass auch die verticale Kante durch O auf die Grundebene Schatten wirft; er geht vom Endpunkte des vorigen nach dem Fusspunkte der Kante; und sein Bild hat L_1' zum Fluchtpunkte.

167. Hinsichtlich der *Beleuchtung* wollen wir uns auf folgende Bemerkungen beschränken. Ein cylindrischer Bündel paralleler Lichtstrahlen treffe auf einer zu ihm schrägen Ebene eine Fläche vom Inhalt f und auf einer zu ihm normalen Ebene eine Fläche vom Inhalte f_1; da f_1 Orthogonalprojection von f ist, so folgt: $f_1 = f \sin \alpha$, worin α *der Winkel der Lichtstrahlen mit der ersteren Ebene*, also $90^0 - \alpha$ derjenige beider Ebenen ist. Die Intensitäten der Beleuchtung verhalten sich daher umgekehrt wie die Flächen, über welche sich dieselbe Lichtmenge ausbreitet; ist also i_0 die Intensität der Beleuchtung auf der normalen, i die auf der schrägen Ebene, so *gilt die Beziehung:*

$$i = i_0 \sin \alpha = i_0 \cos \beta,$$

wo β der Winkel des Lothes auf der schrägen Ebene mit den Lichtstrahlen ist. Wie dieser Winkel α oder β für die dem beleuchteten Theile der Oberfläche eines Polyeders angehörigen Flächen in der kürzesten Weise ermittelt werden kann, ist in Nr. 84 besprochen.

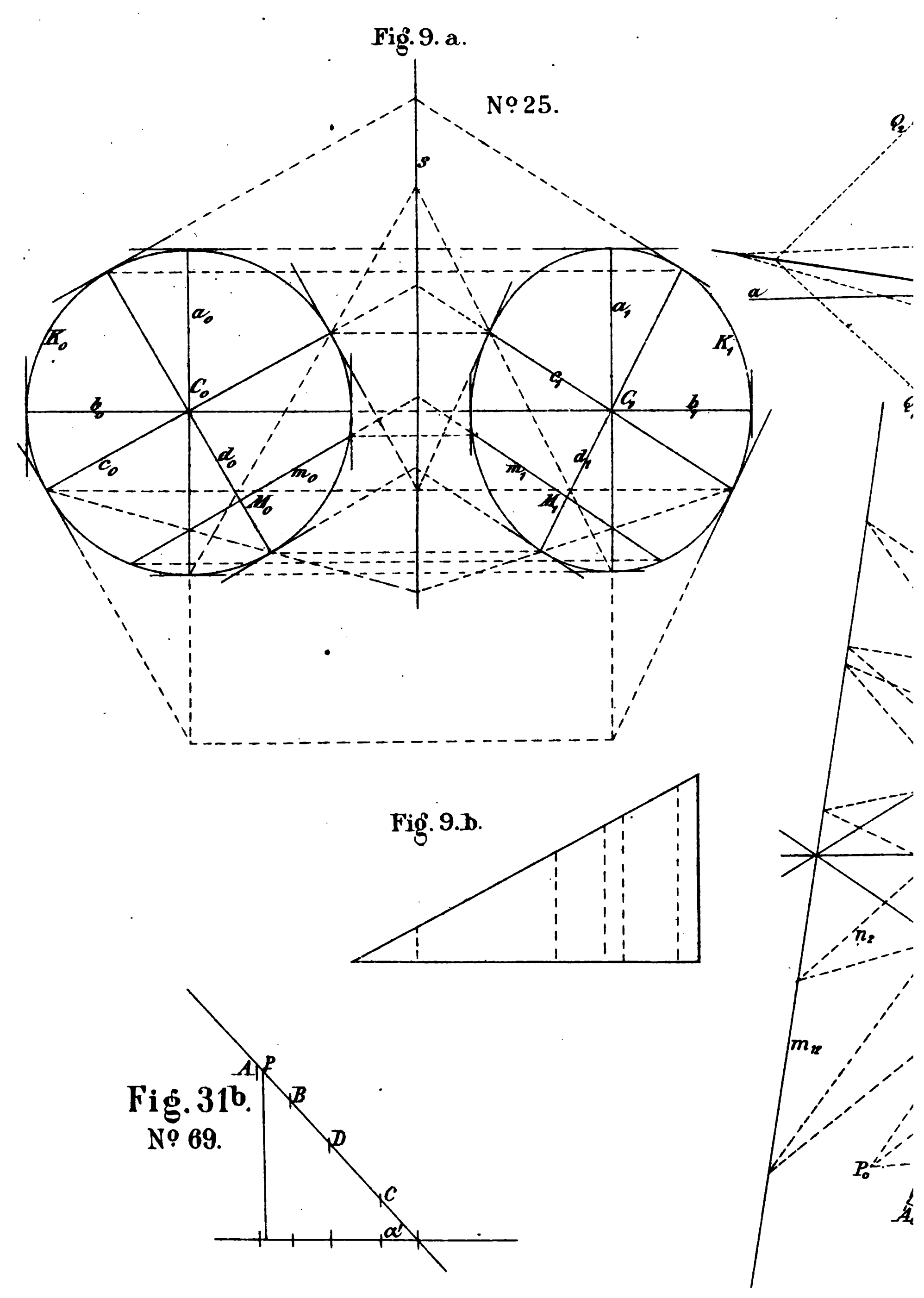
Eine krumme Oberfläche hat in jedem Punkte des beleuchteten Theils die Intensität, welche seiner Berührungsebene zukommt, da die unmittelbare Umgebung des Punktes auf der Fläche in dieser befindlich angesehen werden kann. Die Curven, welche durch die Punkte gleicher Beleuchtungsstärke gebildet werden, heissen *Isophoten;* die grösste oder normale Intensität i_0 ist nur durch einzelne Punkte vertreten; der Schattengrenze oder Trennungslinie entspricht $i = 0$.

Man nimmt i_0 gewöhnlich $= 1$ und construirt dann die Isophoten, welche den Werthen

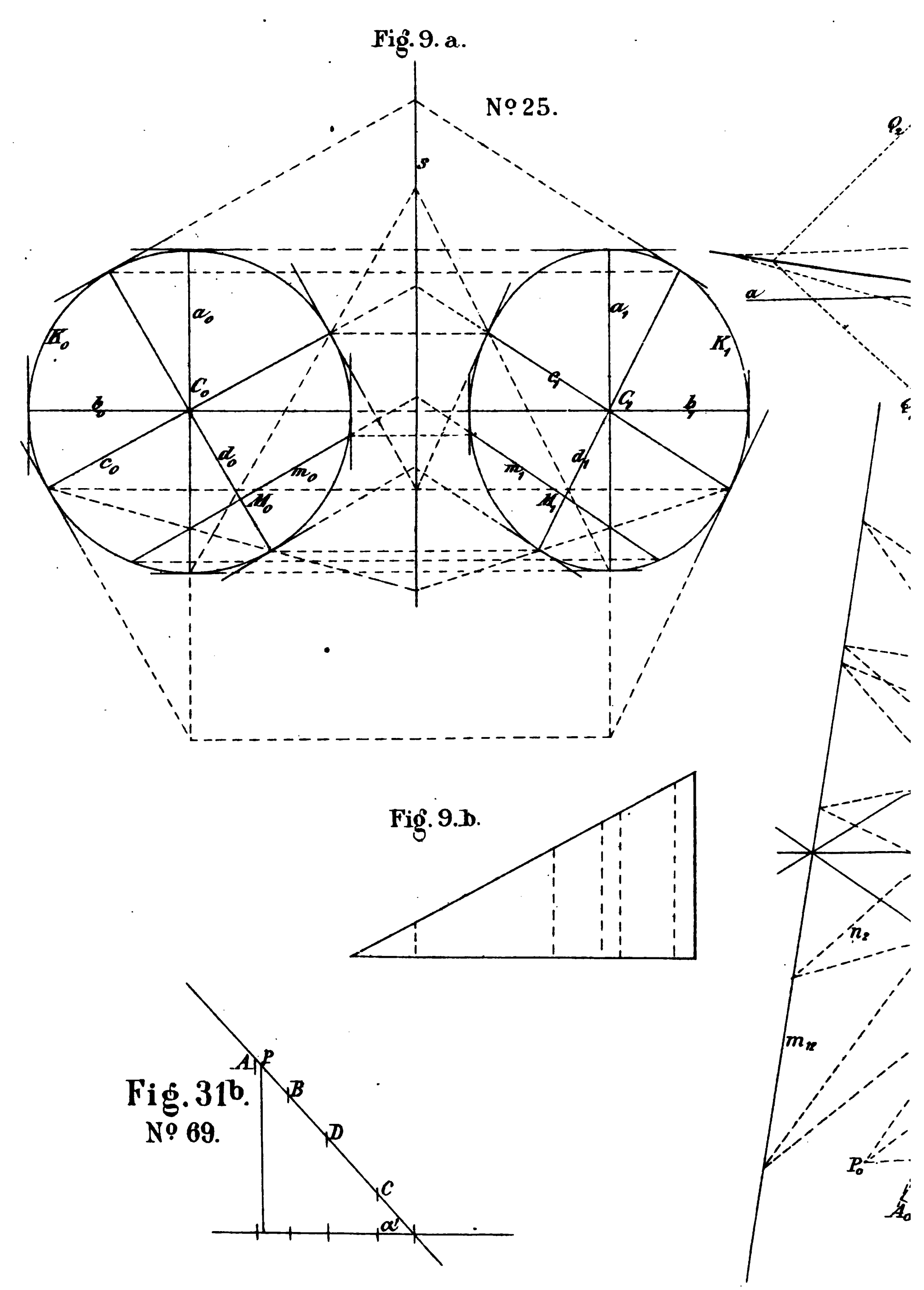
$$\frac{9}{10}, \frac{8}{10}, \ldots \frac{1}{10}, 0$$

von i zugehören. Ist i die so gemessene Intensität, so umhüllen auf der *Kugel* die Berührungsebenen, welche die Neigung $\alpha = \operatorname{arc} \sin i$ gegen die Lichtstrahlen haben, einen Rotationskegel, dessen Spitze auf dem den Lichtstrahlen parallelen Durchmesser d in der Entfernung $\frac{r}{\sin \alpha} = \frac{r}{i}$ vom Mittelpunkte M liegt; der Berührungskreis, die zu i gehörige Isophote, liegt in einer zu d senkrechten Ebene, hat seinen Mittelpunkt auf d in der Entfernung ri von M und sein Radius ist $r\sqrt{1 - i^2}$. Wegen der gleichen Lage der Lichtstrahlen zu den Projectionsebenen (Nr. 163) sind die beiden Projections-Ellipsen congruent, die in Π_1 hat ihren Mittelpunkt auf d_1 in der Entfernung $ri \cos \lambda$ von M_1, wo λ der Winkel der Lichtstrahlen gegen die beiden Projectionsebenen ist: $\operatorname{tg} \lambda = \sin 45^0$, $\cos \lambda = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin \lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Die kleine Axe fällt auf d_1 und die Halbaxen sind $r\sqrt{1 - i^2}$ und $r\sqrt{1 - i^2} \cdot \sin \lambda$. Die doppelte Berührung mit dem scheinbaren Umrisskreise, deren Sehne zur grossen Axe parallel ist, wird erst reell, wenn $i < \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}81 \ldots$ ist. Die zweite Projection verhält sich ebenso zu d_2 und M_2.

$i = 1$ führt zu einem Punkte, dem dem Lichte zugewandten Endpunkte von d.

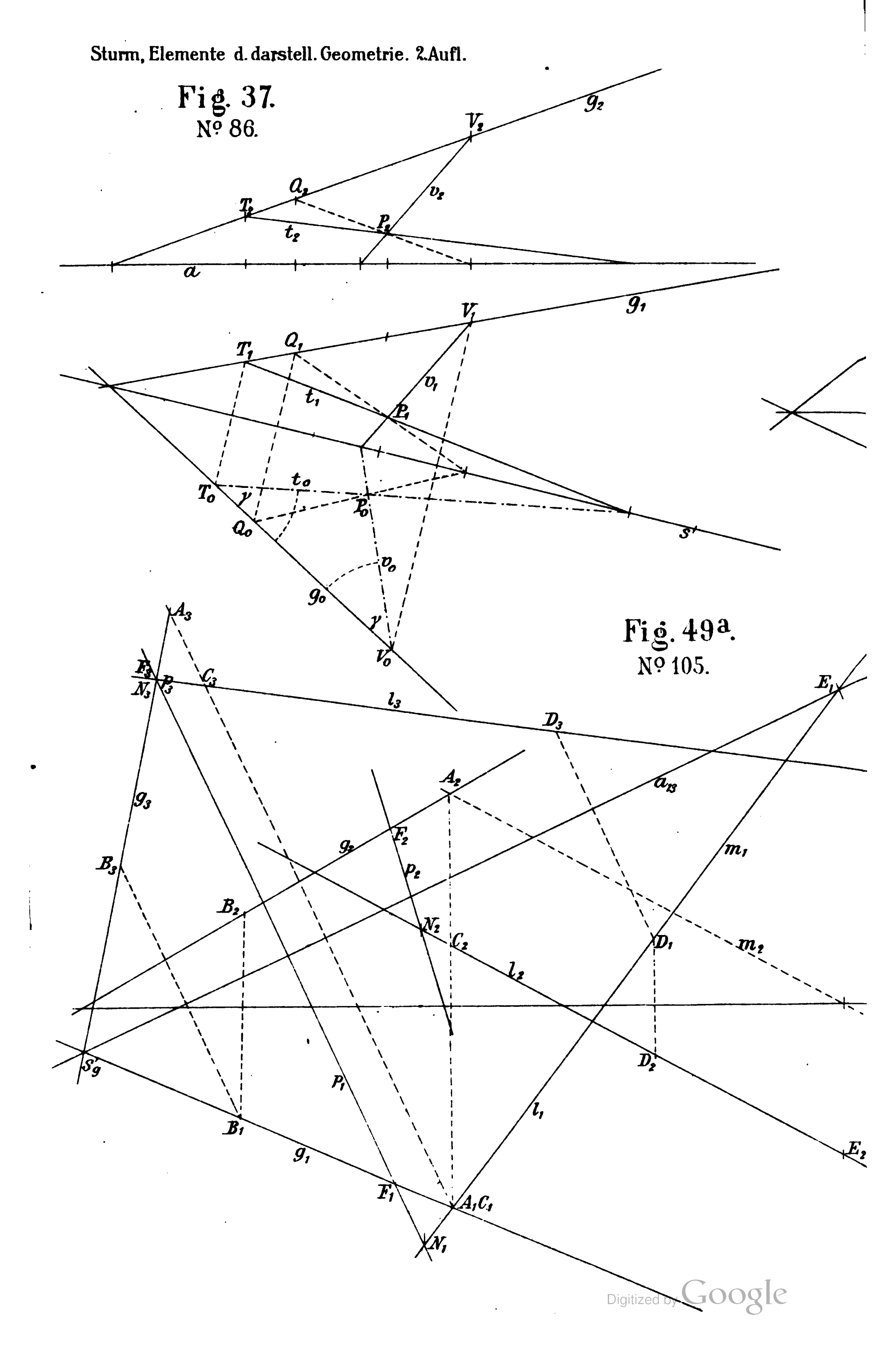


Verlag v. B.G.Teubner, Leipzig.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig.




Fig. 37.
№ 86.
V_2
g_2
Q_2
v_2
T_2
P_2
t_2
a
V_1
g_1
T_1
Q_1
v_1
t_1
P_1
t_0
T_0
γ
P_0
Q_0
s'
v_0
g_0
γ
V_0
Fig. 49a.
№ 105.
A_3
F_3
P_3
N_3
C_3
l_3
D_3
E_1
A_2
a_{13}
g_3
F_2
m_1
g_2
p_2
B_3
B_2
N_2
C_2
D_1
m_2
l_2
S_g
D_2
p_1
l_1
B_1
E_2
g_1
F_1
A_1C_1
N_1

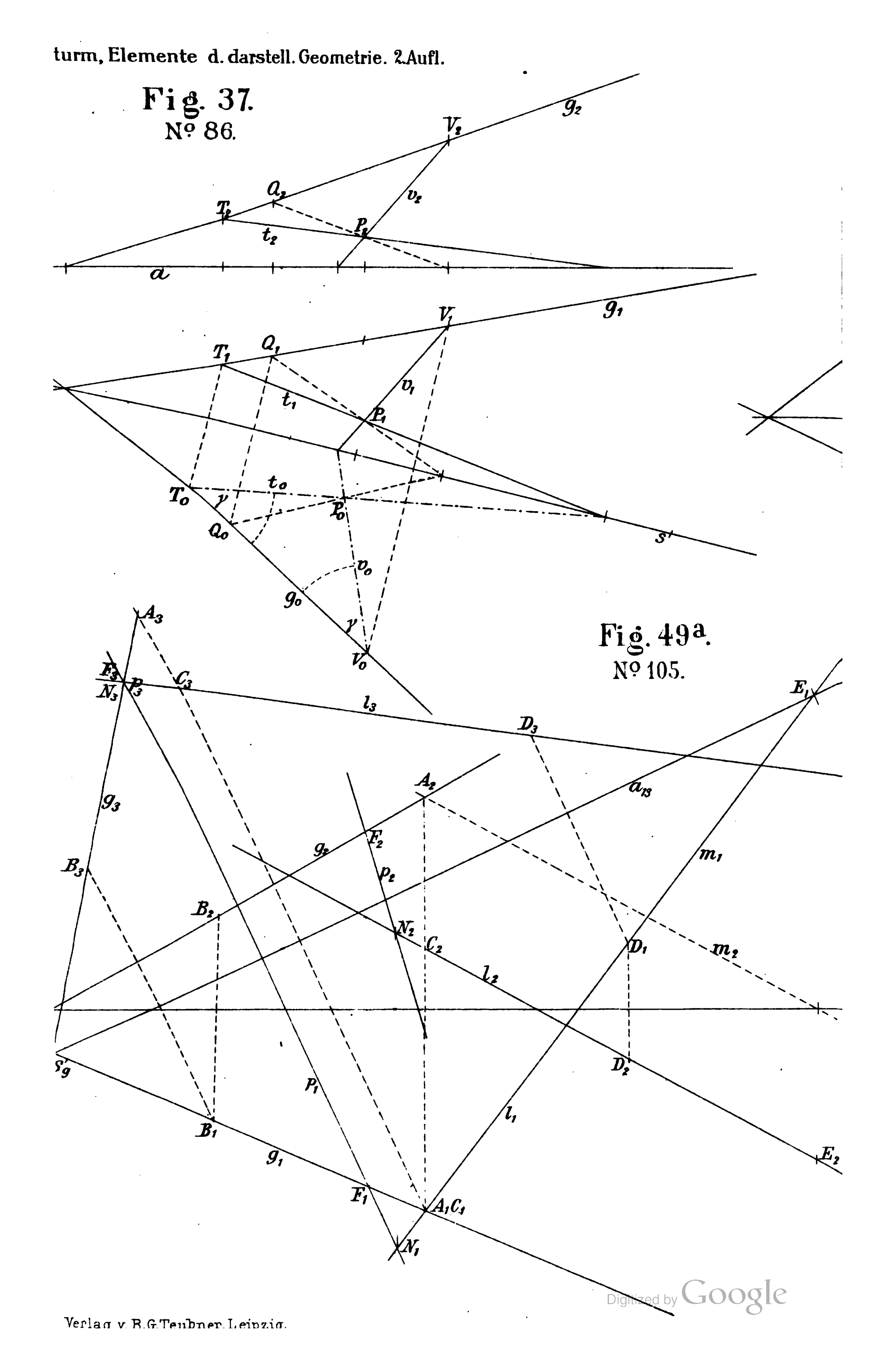
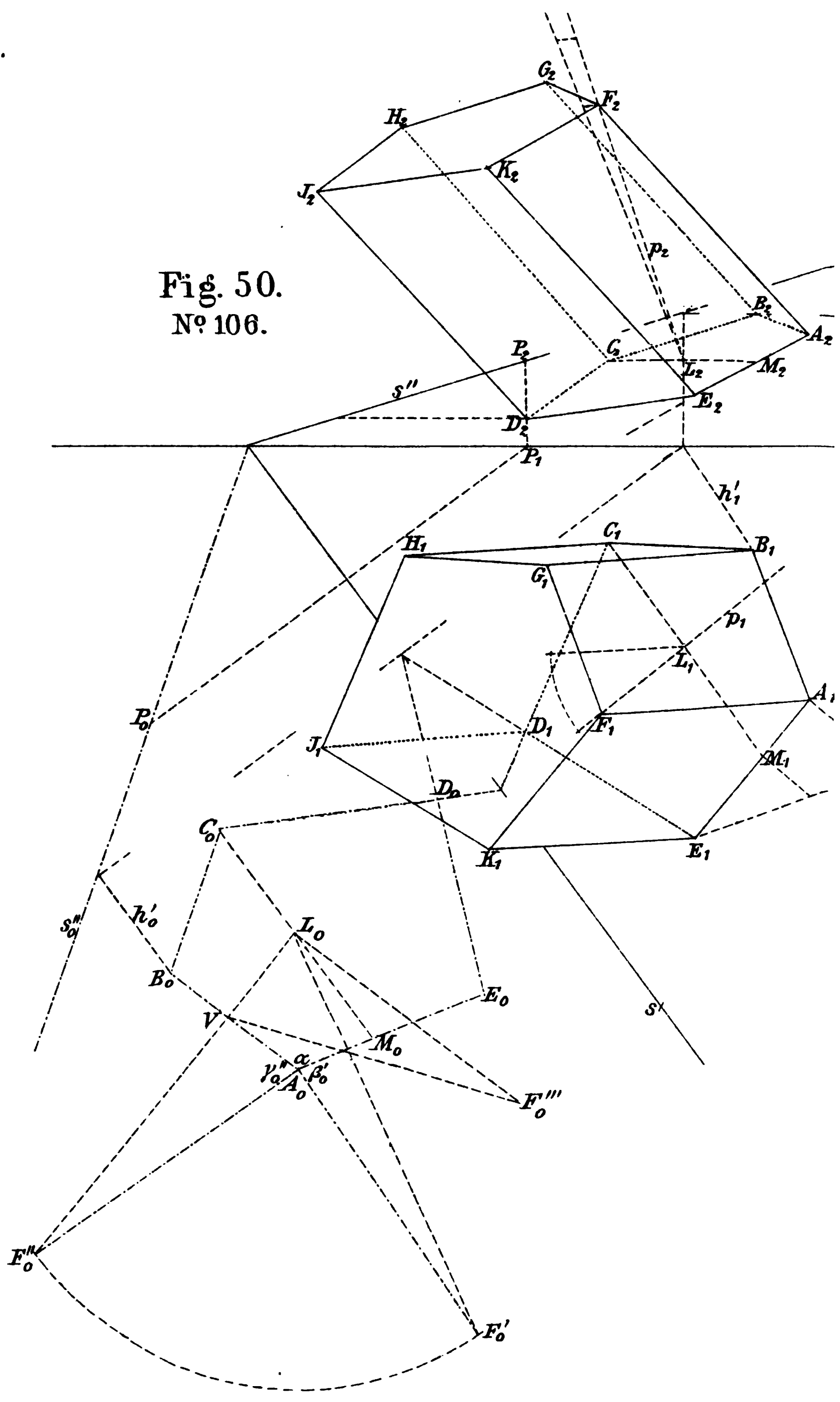
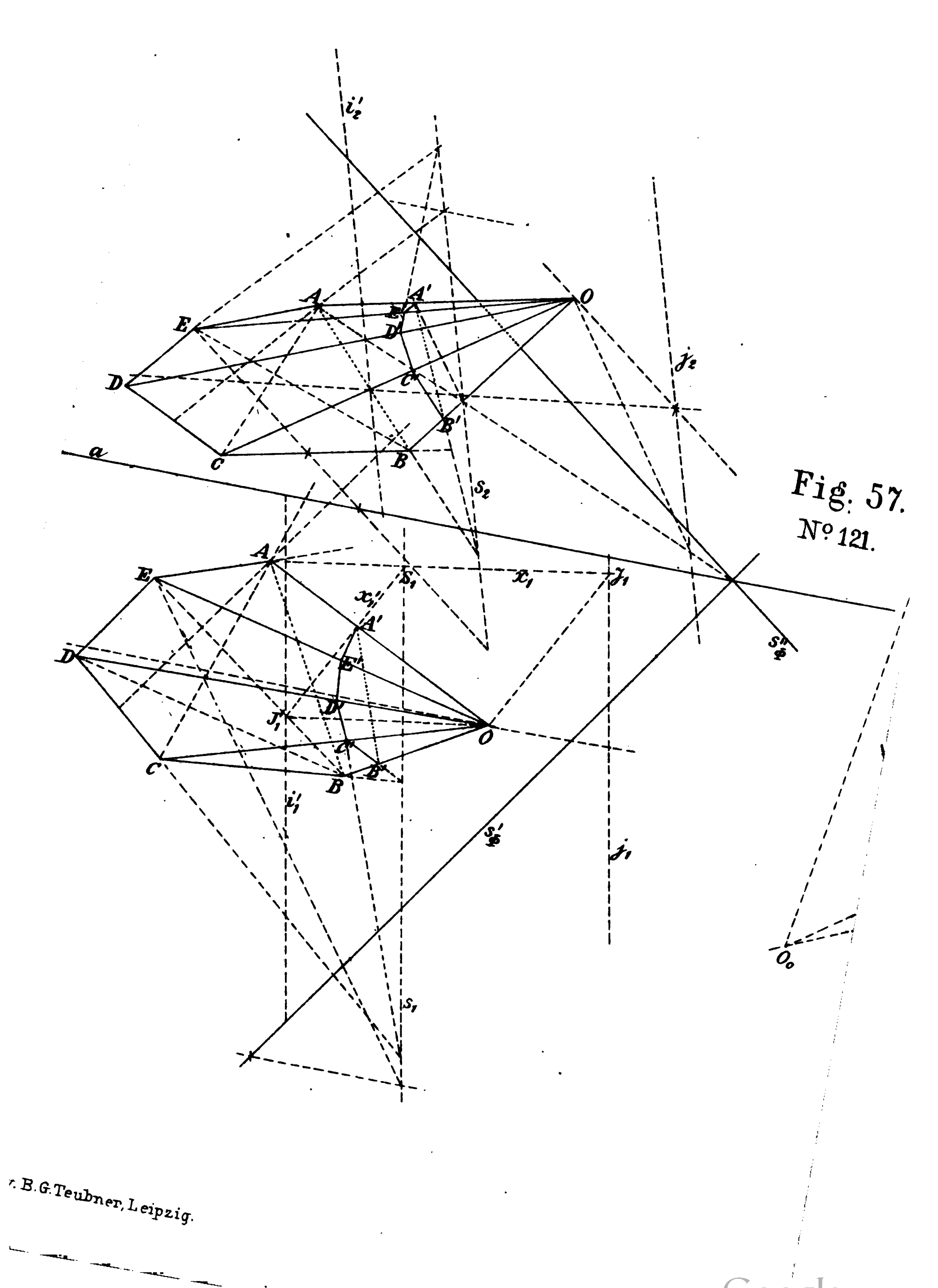


Fig. 37. No 86.

Fig. 49a. No 105.



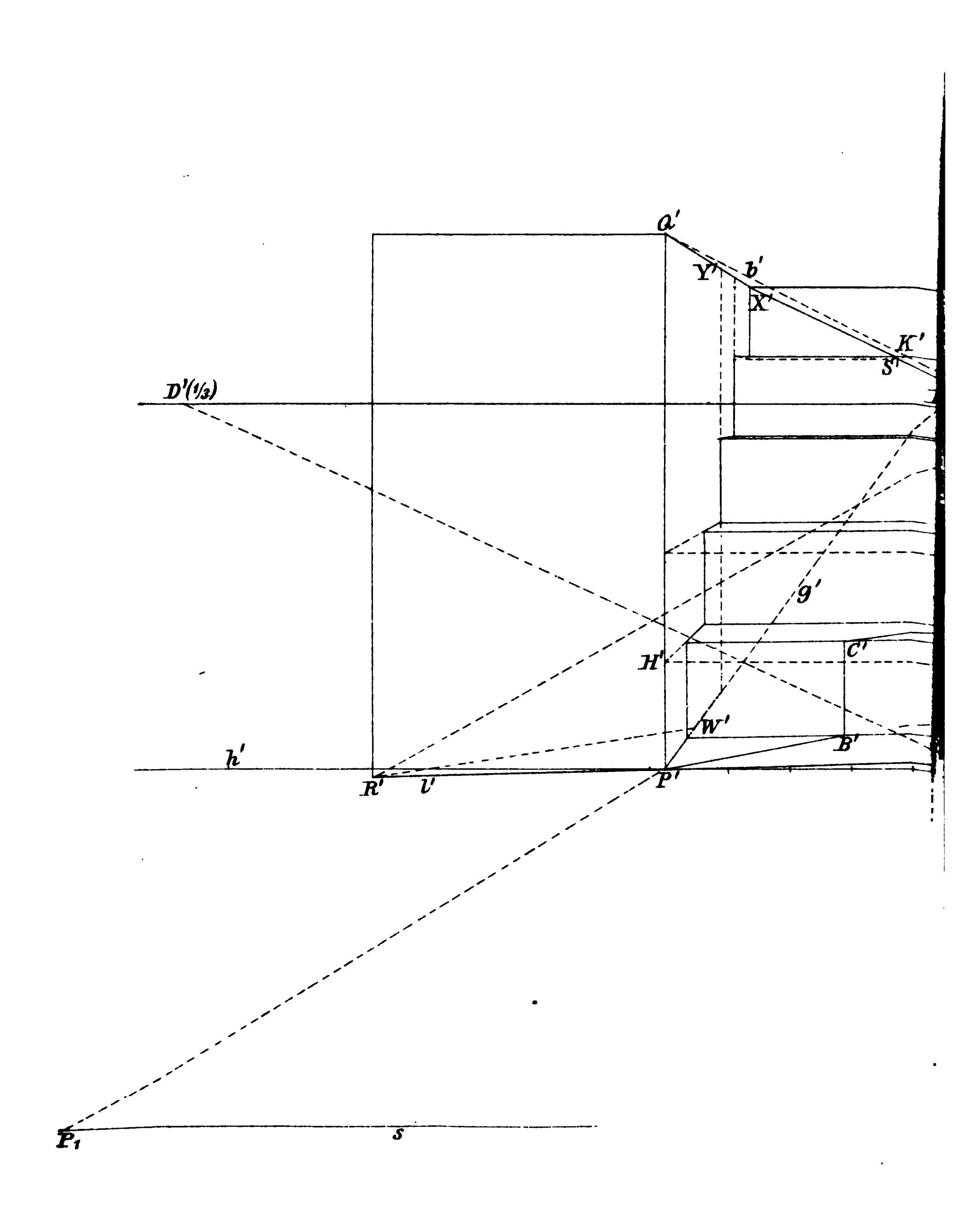
Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig.



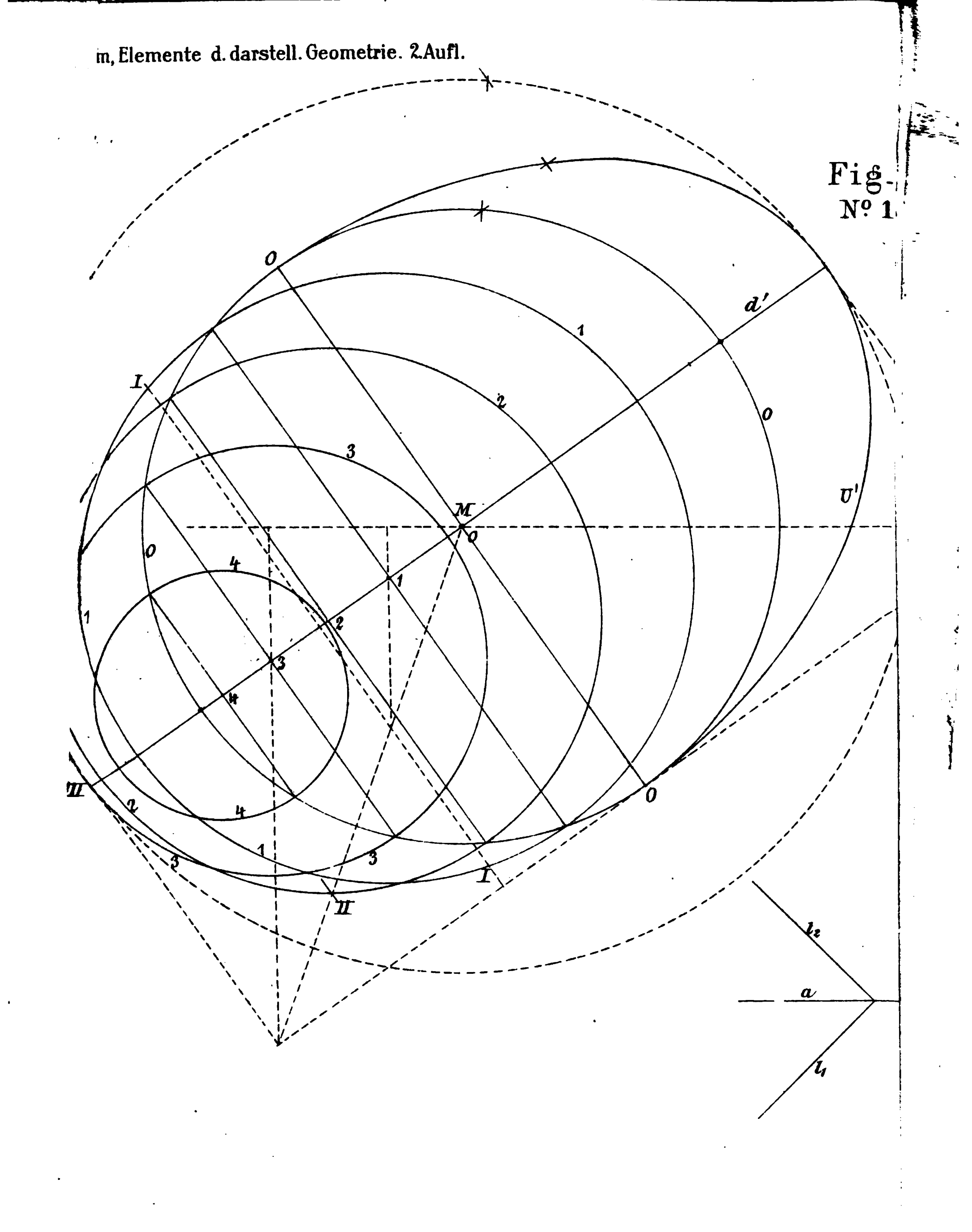
v. B. G. Teubner, Leipzig.

Fig. 60.
No 125-126.

Fig. 79ª
No. 158.



rlag v. B. G. Teubner, Leipzig.



erlag v. B.G.Teubner, Leipzig.

